Die Boolesche Algebra

1 Einführung in die Boolesche Algebra

Die nach dem englischen Mathematiker George BOOLE (1815 – 1864) benannte **Boolesche Algebra** umfasst

- die Mengenalgebra (auch: Mengenlehre),
- die Aussagenalgebra (auch: Aussagenlogik),
- die Schaltalgebra.

Die Entwicklung der Mengenalgebra geht auf den deutschen Mathematiker Georg CANTOR (1845 – 1918) zurück.

Auf der Grundlage von Denkansätzen des griechischen Philosophen ARISTOTELES (384 – 322 v. u. Z.) und des deutschen Philosophen Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 – 1716) entwickelten Boole und der englische Mathematiker Augustus DE MORGAN (1806 – 1871) die Idee einer logischen Formelsprache. Mit diesen Sprachsymbolen ließen sich logische Zusammenhänge übersichtlicher darstellen.

Die Schaltalgebra basiert auf der Aussagenalgebra und wurde 1938 vom amerikanischen Mathematiker Claude Elwood SHANNON (1916 – 2001) entwickelt.

2. Die Mengenalgebra

2.1 Der Mengenbegriff

Eine Menge besteht aus voneinander unterscheidbaren Elementen (Objekte), die wenigstens eine gemeinsame Eigenschaft besitzen.

z. B.:
- die Menge der weiblichen Schüler einer Klasse
- die Menge der Primzahlen
- die Menge der männlichen Autofahrer
- die Menge der Teenager

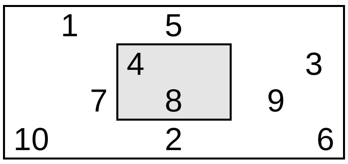
Das Darstellen von Mengen kann mit drei verschiedenen Verfahren erfolgen:

- das Aufzählverfahren: alle Elemente einer Menge werden aufgezählt

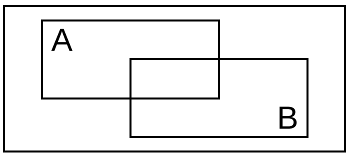
z. B.: A = {2, 3, 5, 7}	Die Menge der einziffrigen Primzahlen.
B = {Berlin, Paris, London, Rom, ...}	Die Menge der europäischen Hauptstädte.
C = {6; 7; 8}	Die Menge der Zahlen 6, 7 und 8.

- das beschreibende Verfahren: Angabe charakteristischer Merkmale der Elemente einer Menge
  z. B.: $A = \{ x \mid 5 < x < 9 \}_N$ Die Menge der Zahlen 6, 7 und 8.

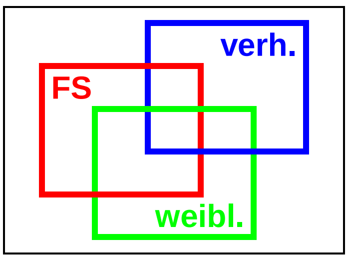
- das Venn-Diagramm: benannt nach dem englischen Mathematiker John VENN (1834 – 1923)



→ die Menge der durch 4 teilbaren ganzen Zahlen zwischen 1 und 10



Jede Variable kann 2 Zustände annehmen.
→ bei 2 Variablen sind es 4 (= 2^2) Felder

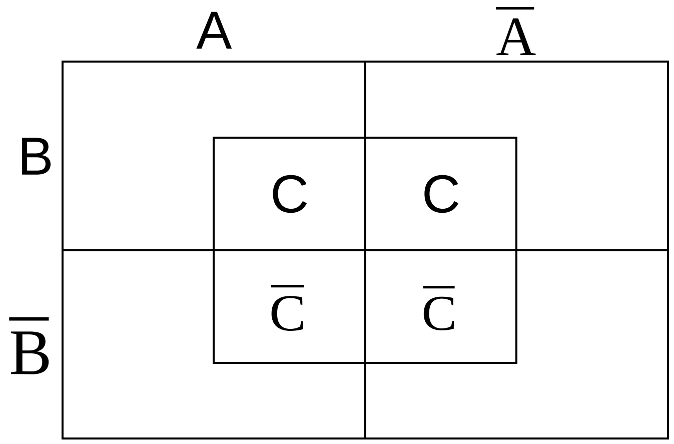


→ bei 3 Variablen sind es 8 (= 2^3) Felder

Eine andere Art der Darstellung bietet das **Karnaugh-Diagramm**, benannt nach dem US-amerikanischen Informatiker Maurice KARNAUGH (geboren 1924). Dabei werden an den Seiten die möglichen Variablenbelegungen aufgetragen:

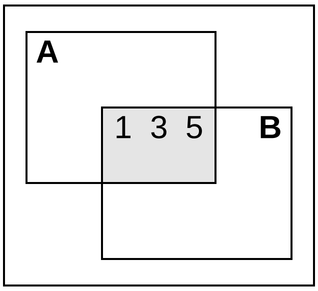
	A	$\overline{A}$
B		
$\overline{B}$		

In Anlehnung an das Karnaugh-Diagramm kann man z. B. drei Variablen auch wie folgt darstellen:



2.2 Die Relationen zwischen Mengen

a) Gleichheit von Mengen



A = { 1, 3, 5 } Die Reihenfolge der Elemente

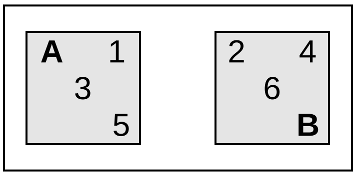
B = { 5, 3, 1 } ist unerheblich!

→ jedes Element ist sowohl in A als auch in B enthalten

auch: A = { 1, 3, 5 } und B = { 1, 3, 5, 1 } Wiederholungen können entfallen!

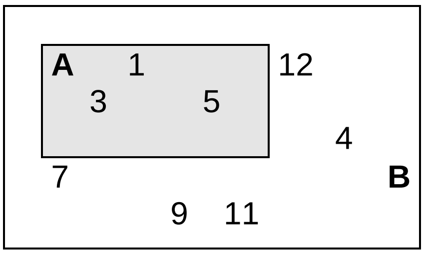
auch: A = { 2^2 } und B = { $\sqrt{16}$ } Ein Element ist unterschiedlich darstellbar!

b) äquivalente Mengen ($A \Leftrightarrow B$ oder $A \sim B$)



→ Zwei Mengen A und B sind äquivalent (gleichmächtig), wenn sie aus gleichviel Elementen bestehen.

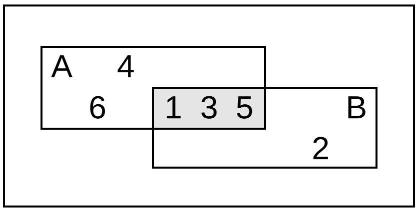
c) Teilmengen ($A \subset B$)



→ Die Menge A ist Teilmenge der Menge B, wenn alle Elemente von A gleichzeitig auch in B enthalten sind.

2.3 Die Verknüpfungen von Mengen

a) Der Durchschnitt von Mengen



$A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, 5\}$

$A \cap B = \{1, 3, 5\}$

→ Die Durchschnittsmenge aus A und B enthält alle die Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

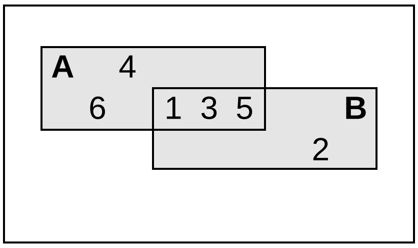
$A \cap 0 = 0$

$A \cap 1 = A$

$A \cap \overline{A} = 0$

$A \cap A = A$ Idempotenz („dasselbe besagend“)

b) Die Vereinigung von Mengen



$A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{1, 2, 3, 5\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

→ Die Vereinigungsmenge aus A und B enthält alle Elemente, die in A und in B enthalten sind.

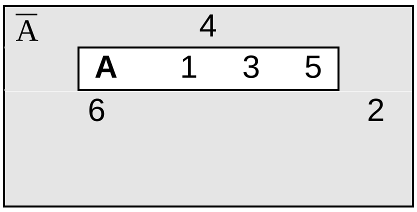
$A \cup 0 = A$

$A \cup 1 = 1$

$A \cup A = A$

$A \cup \overline{A} = 1$ (auch: G)

c) Das Komplement einer Menge



$A = \{1, 3, 5\}$

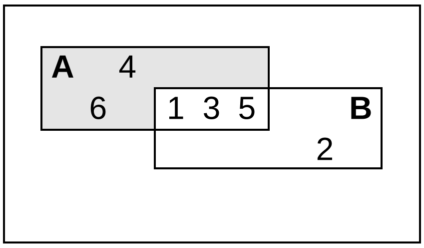
$\overline{A} = \{2, 4, 6\}$ (gelesen: „nicht A“)

→ Die Ergänzungsmenge $\overline{A}$ (auch: Komplement) enthält alle Elemente, die nicht der Menge A angehören.

$\overline{\mathbf{1}} = 0$

$\overline{\mathbf{0}} = 1$

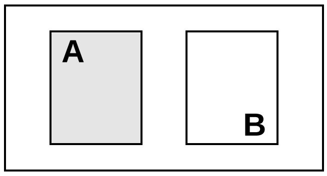
d) <u>Die Differenzmenge</u>



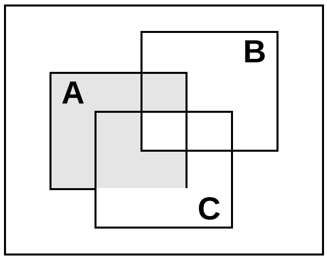
A = {1, 3, 4, 5, 6}
B = {1, 2, 3, 5}
A \ B = {4, 6} (gelesen: „A ohne B")

→ Die Differenzmenge (auch: Restmenge)
A ohne B enthält alle Elemente der Menge A, die nicht B angehören.

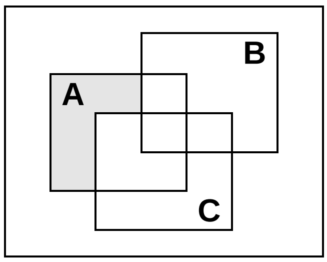
$A \setminus B$



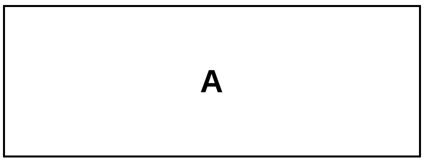
$A \setminus (B \cap C)$



$A \setminus (B \cup C)$



e) <u>Die leere Menge</u>

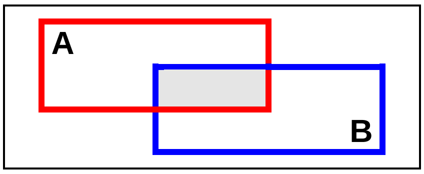


A = { }

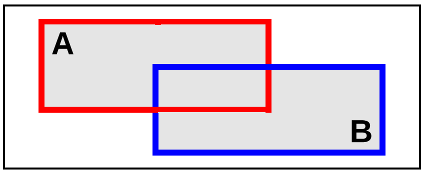
→ Die leere Menge A enthält kein Element.

2.4 Die Gesetze der Mengenlehre

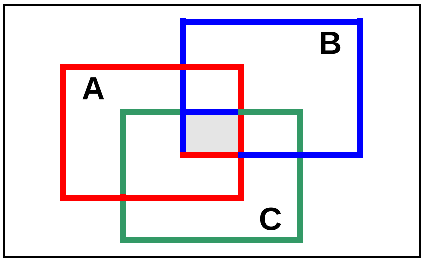
Kommutativgesetze: $A \cap B = B \cap A$



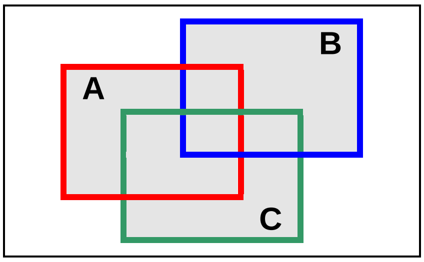
$A \cup B = B \cup A$



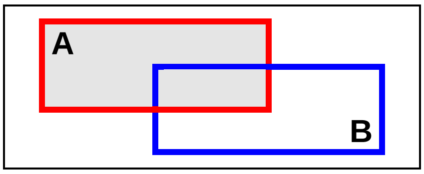
Assoziativgesetze: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$= A \cap B \cap C$



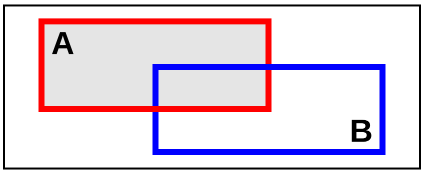
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$= A \cup B \cup C$



Ausschließmöglichkeiten: $A \cap (A \cup B) = A$

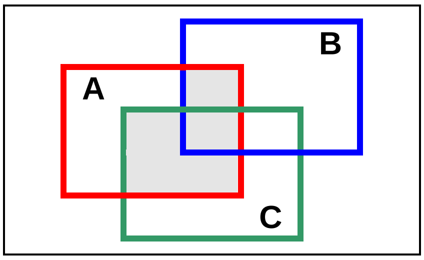


$A \cup (A \cap B) = A$

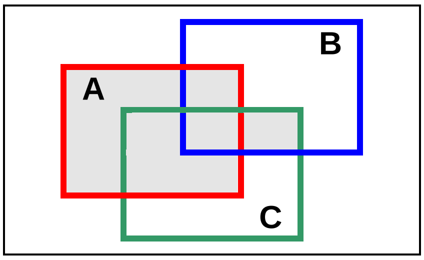


Distributivgesetze:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

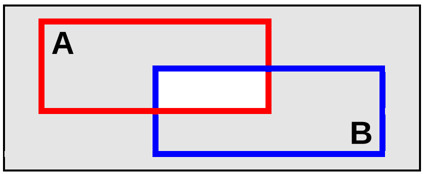


$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

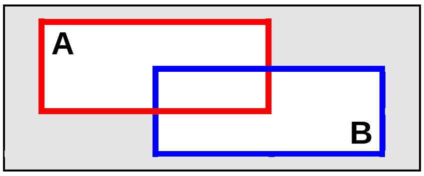


Sätze von de Morgan:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

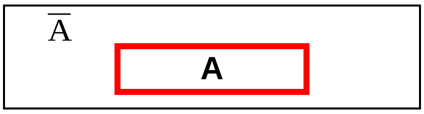


$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

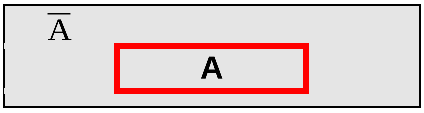


Gesetze der Vollständigkeit:

$$A \cap \overline{A} = 0$$

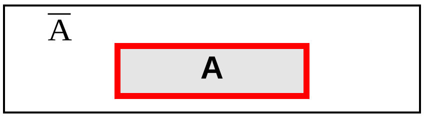


$$A \cup \overline{A} = 1$$



Gesetz der doppelten Negation:

$$\overline{\overline{A}} = A$$



1.) Von 30 Schülern einer Klasse spielen 9 nur Fußball und 8 nur Handball. Zwei Schüler spielen keine der beiden Sportarten.
Wie viele Schüler spielen sowohl Fußball als auch Handball?

2.) Von 297 Haushalten eines Wohngebietes beziehen 211 die ”Sächsische Zeitung”, 192 die ”FF dabei” sowie 127 die ”Sächsische Zeitung” und die ”FF dabei”. Wie viele Haushalte beziehen weder die ”Sächsische Zeitung” noch die ”FF dabei”?

3.) Von 100 Hausfrauen, die in der Leipziger Straße wohnen, kaufen 27 nur im Geschäft A, 24 nur im Geschäft B sowie 4 in keinem der beiden Geschäfte. Wie viele Hausfrauen kaufen insgesamt im Geschäft A?

4.) 196 Haushalte eines Wohngebietes beziehen die ”Sächsische Zeitung”, 158 die ”FF dabei”, 12 keine der beiden Zeitungen, 86 nur die ”FF dabei”.
Wie viele Haushalte gibt es in diesem Wohngebiet?

5.) Von 28 Schülern einer Klasse wählten 18 Englisch als Begegnungssprache, 13 Französisch. 4 Schüler wählten keine der angebotenen Sprachen.

Wie viele Schüler lernen ...

a) Englisch <u>und</u> Französisch?

b) <u>nur</u> Englisch?

c) <u>nur</u> Französisch?

d) <u>nicht</u> Englisch?

e) <u>nicht</u> Französisch?

f) Englisch <u>oder</u> Französisch?

g) <u>entweder</u> Englisch <u>oder</u> Französisch?

6.) Von 30 Schülern einer Klasse lernen 15 Russisch, 13 Englisch, 14 Französisch, 3 Russisch und Englisch, 7 Russisch und Französisch, 6 Englisch und Französisch sowie 2 Russisch, Englisch und Französisch. Wie viele Schüler wählten keine dieser Fremdsprachen?

7.) An einer Betriebsfeier nehmen 53 Mitarbeiter teil. Im Laufe des Abends bestellen 18 Mitarbeiter Bier, 24 Wein, 17 Sekt, 5 Bier und Wein, 5 Wein und Sekt, 4 Bier und Sekt. 2 Mitarbeiter bestellen Bier und Wein, aber keinen Sekt. Wie viele Mitarbeiter bestellen Bier, Wein und Sekt?

8.) Am Silvestertag kaufen 59 Kunden in der Drogerie. 15 Kunden kaufen Silvesterraketen, 22 Tischfeuerwerke, 11 Raketen und Tischfeuerwerke, 13 Tischfeuerwerke und Knaller, 10 Raketen und Knaller, 7 Raketen, Tischfeuerwerke und Knaller. Wie viele Kunden kaufen Knaller, wenn 21 der Kunden keine Silvesterartikel erwerben?

9.) Von 190 befragten Haushalten besitzen 127 ein Fernsehgerät, 158 eine Waschmaschine, 154 ein Radio, 101 ein Fernsehgerät und ein Radio, 103 ein Fernsehgerät und eine Waschmaschine, 129 eine Waschmaschine und ein Radio, 8 nur eine Waschmaschine. Wie viele Haushalte besitzen sowohl ein Fernsehgerät als auch ein Radio und eine Waschmaschine

10.) Von 28 befragten Haushalten besitzen 14 ein Fernsehgerät, 14 eine Waschmaschine, 13 ein Radio, 3 ein Fernsehgerät und ein Radio, 7 ein Fernsehgerät und eine Waschmaschine, 5 eine Waschmaschine und ein Radio, 4 nur eine Waschmaschine. Wie viele Haushalte besitzen weder Fernsehgerät noch Radio noch Waschmaschine?

11.) Von 102 Haushalten eines Wohngebietes lesen 56 die Zeitschrift A, 63 die Zeitschrift B, 55 die Zeit-schrift C, 38 die Zeitschriften A und B, 35 die Zeitschriften B und C, 10 ausschließlich die Zeitschrift A sowie 21 alle drei Zeitschriften. Wie viele Haushalte lesen keine der drei Zeitschriften?

12.) Die Herren X, Y und Z würfeln jeweils gleichzeitig mit jeweils einem Würfel. Achtmal würfeln nur Herr X und Herr Y gleichzeitig eine gerade Zahl, siebenmal gleichzeitig eine ungerade Zahl. Sechsmal würfelt nur Herr X eine ungerade Zahl, fünfmal eine gerade Zahl. Viermal würfeln alle drei Herren gleichzeitig eine ungerade Zahl und dreimal gleichzeitig eine gerade Zahl. Zweimal würfeln nur Herr X und Herr Z gleichzeitig eine ungerade Zahl, einmal gleichzeitig eine gerade Zahl.

a) Wie oft würfelten die drei Herren gleichzeitig?
b) Wie oft wurde gleichzeitig genau eine gerade Zahl gewürfelt?
c) Wie oft wurde gleichzeitig mindestens eine ungerade Zahl gewürfelt?
d) Wie oft wurden gleichzeitig höchstens zwei gerade Zahlen gewürfelt?
e) Wie oft wurde gleichzeitig höchstens eine ungerade Zahl gewürfelt?

X	Y	Z	Anzahl
gerade	gerade	gerade	
gerade	gerade	ungerade	
gerade	ungerade	gerade	
gerade	ungerade	ungerade	
ungerade	gerade	gerade	
ungerade	gerade	ungerade	
ungerade	ungerade	gerade	
ungerade	ungerade	ungerade	

13.) Die Herren X, Y und Z würfeln jeweils gleichzeitig mit jeweils einem Würfel. Viermal würfeln nur Herr X und Herr Y gleichzeitig eine gerade Zahl, siebenmal gleichzeitig eine ungerade Zahl. Dreimal würfelt nur Herr X eine ungerade Zahl, einmal eine gerade Zahl. Neunmal würfeln alle drei Herren gleichzeitig eine ungerade Zahl und sechsmal gleichzeitig eine gerade Zahl. Fünfmal würfeln nur Herr X und Herr Z gleichzeitig eine ungerade Zahl, zweimal gleichzeitig eine gerade Zahl.

a) Wie oft würfelten die drei Herren gleichzeitig?

b) Wie oft wurde gleichzeitig genau eine ungerade Zahl gewürfelt?

c) Wie oft wurde gleichzeitig mindestens eine gerade Zahl gewürfelt?

d) Wie oft wurden gleichzeitig höchstens zwei ungerade Zahlen gewürfelt?

e) Wie oft wurde gleichzeitig genau zwei gerade Zahl gewürfelt?

X	Y	Z	Anzahl
gerade	gerade	gerade	
gerade	gerade	ungerade	
gerade	ungerade	gerade	
gerade	ungerade	ungerade	
ungerade	gerade	gerade	
ungerade	gerade	ungerade	
ungerade	ungerade	gerade	
ungerade	ungerade	ungerade	

14.) Von einer Klasse Umschüler ist folgendes bekannt: 8 Umschüler sind Männer, 5 sind verheiratete Männer. 16 Umschüler besitzen eine Fahrerlaubnis, 5 Fahrerlaubnisbesitzer sind Männer, 18 Umschüler sind verheiratet. 3 verheiratete, männliche Umschüler besitzen eine Fahrerlaubnis. 7 verheiratete, weibliche Umschüler besitzen eine Fahrerlaubnis. 5 unverheiratete, weibliche Umschüler besitzen keine Fahrerlaubnis.

a) Wie viele Umschüler gibt es in der Klasse?

b) Wie viele der Frauen sind verheiratet?

c) Wie viele der Männer besitzen keine Fahrerlaubnis?

Fahrerlaubnis

	verh.	unverh.	unverh.	verh.	
männlich					weiblich
	verh.	unverh.	unverh.	verh.	

keine Fahrerlaubnis

15.) Während der Frühstückspause wurde in der Kantine einer Schule folgendes beobachtet: 40 Umschüler tranken Kaffee, 34 Frauen tranken Kaffee, 28 weibliche Umschüler tranken Kaffee oder Tee, 28 Lehrlinge tranken Kaffee oder Tee, 19 männliche Umschüler tranken Kaffee, 17 Besucher tranken Tee, 3 weibliche Lehrlinge tranken Tee, 2 männliche Lehrlinge tranken Tee.

a) Wie viele Besucher kamen in die Kantine?

b) Wie viele männliche Umschüler tranken Tee?

c) Wie viele weiblichen Lehrlinge tranken Kaffee?

Lehrlinge

	Raucher	NR	NR	Raucher	
Tee					Kaffee
	Raucher	NR	NR	Raucher	

Umschüler

16.) An der Weihnachtsfeier eines Unternehmens nehmen 42 männliche Mitarbeiter teil. 32 Gäste rauchen im Laufe des Abends wenigstens eine Zigarette. Ebenfalls 32 Gäste rauchen nicht, aber trinken wenigstens ein Glas Alkohol. 28 Gäste nehmen im Laufe des Abends nur alkoholfreie Getränke zu sich. 16 Gäste trinken weder Alkohol, noch rauchen sie. 13 weibliche Gäste rauchen. 11 weibliche Gäste rauchen nicht und trinken keinen Alkohol. 8 weibliche Gäste rauchen und trinken Alkohol.

a) Wie viele Gäste nahmen an der Weihnachtsfeier teil?
b) Wie viele Männer rauchen nicht und trinken keinen Alkohol?
c) Wie viele Frauen rauchen nicht?

männlich

	Raucher	NR	NR	Raucher	
Alkohol					kein Alkohol
	Raucher	NR	NR	Raucher	

weiblich

17.) An der Faschingsfeier eines Unternehmens nehmen 36 weibliche Mitarbeiter teil. 38 Gäste nehmen im Laufe des Abends nur alkoholfreie Getränke zu sich. 32 Gäste rauchen im Laufe des Abends wenigstens eine Zigarette. 30 Gäste rauchen nicht, aber trinken wenigstens ein Glas Alkohol. 19 Gäste trinken weder Alkohol, noch rauchen sie. 15 weibliche Gäste rauchen. 7 weibliche Gäste rauchen nicht und trinken keinen Alkohol. 4 weibliche Gäste rauchen und trinken Alkohol.

a) Wie viele Gäste nahmen an der Weihnachtsfeier teil?
b) Wie viele Männer rauchen nicht und trinken keinen Alkohol?
c) Wie viele Frauen rauchen nicht?

männlich

	Raucher	NR	NR	Raucher	
Alkohol					kein Alkohol
	Raucher	NR	NR	Raucher	

weiblich

18.) An einer Feier nehmen 18 Frauen teil. 26 Gäste trinken alkoholische Getränke. 24 Gäste sind Nichtraucher. 11 Gäste rauchen nicht, aber trinken Alkohol. 13 Gäste trinken keinen Alkohol und rauchen. 11 Frauen rauchen. 6 Frauen rauchen und trinken Alkohol. 16 Männer trinken Alkohol.

a) Wie viele Gäste nahmen an der Weihnachtsfeier teil?
b) Wie viele Männer rauchen nicht und trinken keinen Alkohol?
c) Wie viele Frauen rauchen nicht?

männlich

	Raucher	NR	NR	Raucher	
Alkohol					kein Alkohol
	Raucher	NR	NR	Raucher	

weiblich

19.) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für folgende Ausdrücke!

$A \setminus B$ **$C \setminus (A \cup B)$** **$B \setminus (A \cap C)$**

$(A \cap B) \setminus C$ **$(A \cup B) \setminus C$** **$G \setminus (A \cup B)$**

$A \cup (B \cap C)$ **$(G \setminus A) \cap (\overline{A} \cup B)$** **$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B})$**

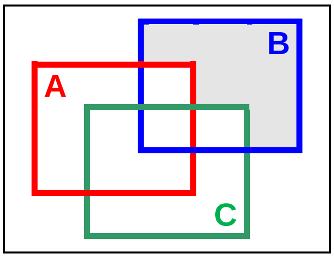
20.) Zeichnen Sie die Venn-Diagramme für folgende Ausdrücke!

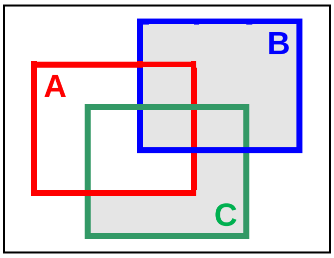
$[C \setminus (A \cup \overline{B})] \cup [(\overline{A} \cap B) \setminus C]$ **$(A \setminus C) \cup (A \cap B \cap C)$** **$(A \cup C) \setminus (B \cap \overline{C})$**

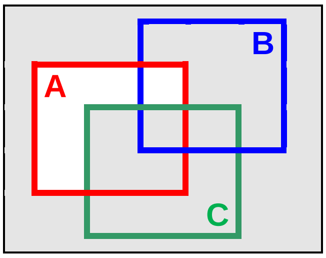
$(B \cup C) \setminus (A \cup [B \cap C])$ **$G \setminus (A \cup C)$** **$A \cap (B \cup C)$**

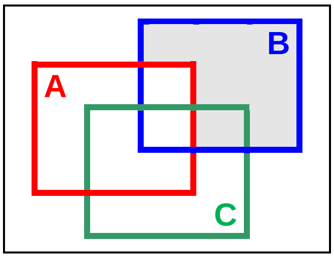
$B \cap (A \cup C)$ **$\overline{A \cup B}$** **$C \cap (A \cup B)$**

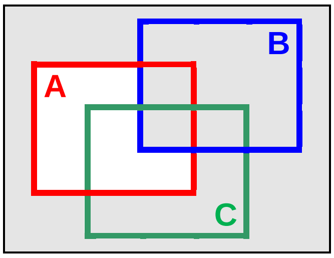
21.) Ermitteln Sie die Ausdrücke für folgende Venn-Diagramme!

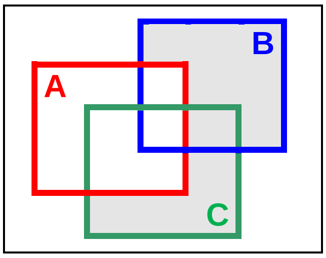




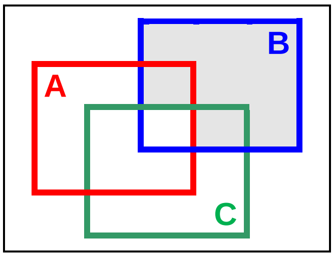


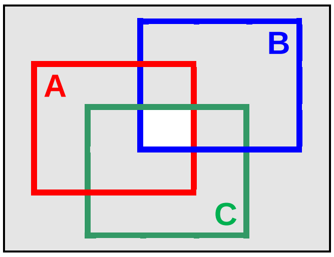


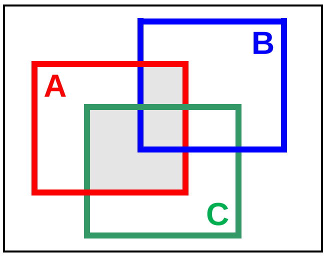


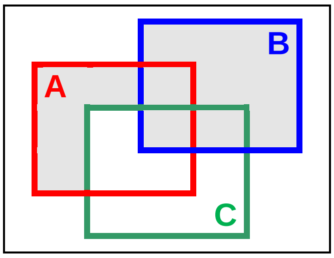


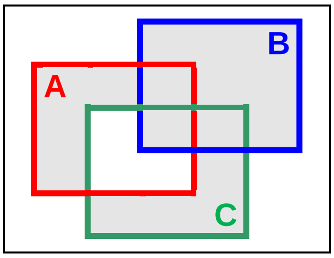
22.) Ermitteln Sie die Ausdrücke für folgende Venn-Diagramme!

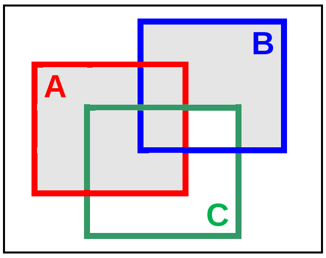


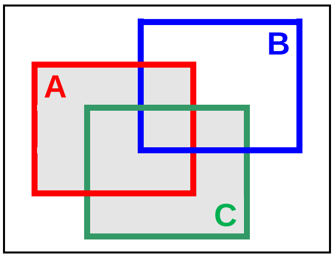


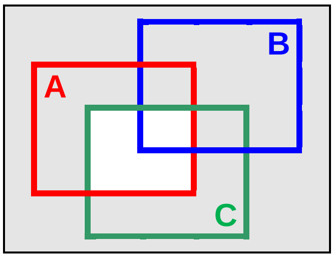


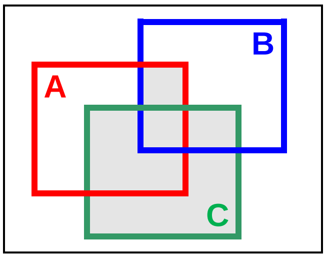


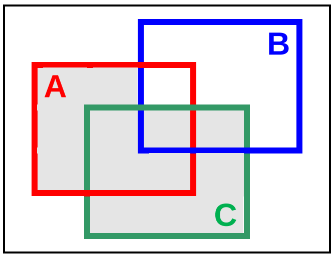


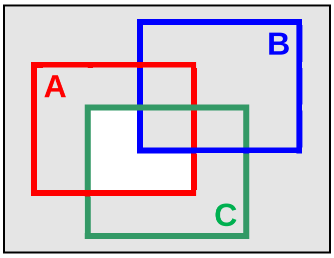


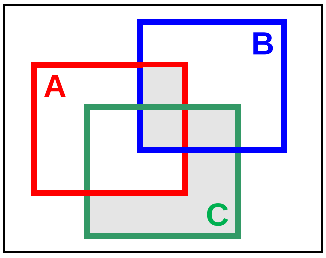


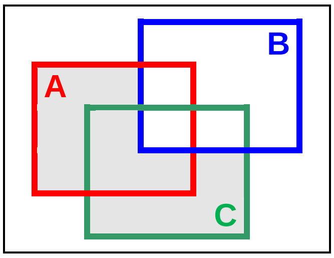


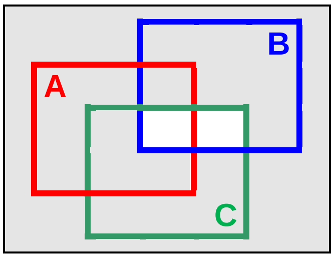


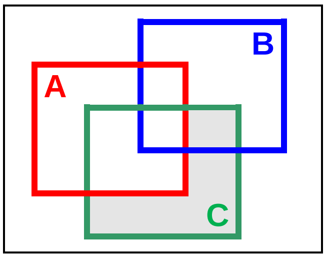












3. Die Aussagenalgebra

3.1 Eine Einführung in die Aussagenalgebra

Die nach dem englischen Mathematiker George BOOLE (1815 – 1864) benannte Boolesche Algebra umfasst

– die Mengenalgebra (auch: Mengenlehre),
– die Aussagenalgebra (auch: Aussagenlogik),
– die Schaltalgebra.

Die (Aussagen-)Logik als Wissenschaft ist Anleitung zur Widerspruchsfreiheit und Folgerichtigkeit.
Wahres ist dabei stets Ausgangspunkt des Denkens.

Aussagenlogik:
- Bestandteil der modernen Mathematik
- bedeutsam beim Programmieren von elektronischen Schaltungen (Schaltalgebra)

Aussage: sinnvoller Satz, der entweder wahr oder falsch ist
(Der Polizist bittet "Machen sie jetzt Ihre Aussage!")

23.) Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

VW stellt nur ein Auto-Modell her.	
Rosi Ackermann war die erste Frau, die 2 m übersprang.	
Dresden liegt an der Elbe.	
8 ist eine ungerade Zahl.	
– ¾ ist größer als – ½.	
Wechselschulden sind Holschulden.	
Im Westen ist alles besser.	
$6{,}5 \cdot (-4) \;<\; -25$	
$3^2 \geq 2^3$	
Bonn ist Hauptstadt der Bundesrepublik Deutschland.	
13 ist eine Glückszahl.	
256 ist keine Quadratzahl.	
$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ heißt die 3. Binomische Formel.	

Aussageform: Aussageformen sind Sätze mit (wenigstens einer) Variablen, die nach Ersetzen durch ein Element der Lösungsmenge zur Aussage werden.

x	**ist eine Primzahl.**

→ Alle x_i, die zu einer wahren Aussage führen, heißen Lösungsmenge L der Aussageform.

↑ Leerstelle, Platzhalter, Variable

↑ Aussageform

24.) Ergänzen Sie folgende Leerstellen, sodass **wahre Aussagen** entstehen!

Leonardo da Vincis Mona Lisa hängt im ... von Paris.	
Das World Trade Centre befindet sich in der Stadt ...	
England wurde im Jahr ... Fußball-Weltmeister.	
Die Probezeit eines Arbeitnehmers dauert maximal ... Monate.	
Die Zahl 14 ist durch die Zahlen ... und ... ganzzahlig teilbar.	
Deutschland hat insgesamt ... Bundesländer.	

Zwei Aussageformen sind **äquivalent** (⇔, gleichwertig), wenn sie gleiche Lösungsmengen haben.

25.) Prüfen Sie folgende Aussagen auf **Äquivalenz**!

$2 + x = 7$	und	$2x = 10$	
$3 + x < 5$	und	$2x = 2$	
„... ist die Hauptstadt Italiens.“	und	„... liegt in Europa.“	

3.2 Das Verknüpfen von Aussagen und Aussageformen

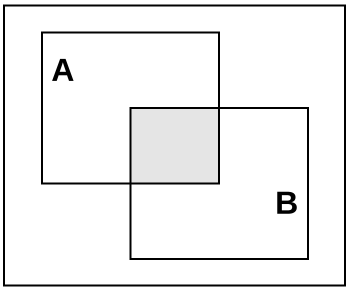
3.2.1 Die Konjunktion (Junktor: $\wedge$)

auch: UND-Verknüpfung, AND, logische Multiplikation, logisches Produkt

Die UND-Aussage ist wahr, wenn **alle** Teilaussagen wahr sind.
Die UND-Aussage ist falsch, wenn **mindestens eine** der Teilaussagen falsch ist.

Beispiele:

Aussage A		Aussage B	A	B	$A \wedge B$
Dresden ist eine deutsche Stadt.	$\wedge$	Dresden liegt an der Elbe.	w	w	w
Dresden ist eine deutsche Stadt.	$\wedge$	Dresden liegt am Rhein.	w	f	f
Dresden ist eine polnische Stadt.	$\wedge$	Dresden liegt an der Elbe.	f	w	f
Dresden ist eine polnische Stadt.	$\wedge$	Dresden liegt am Rhein.	f	f	f



26.) Welche der folgenden **UND-Verknüpfungen** sind wahr?

Riesa liegt an der Elbe.	$\wedge$	Hamburg liegt am Rhein.	
Die Winkel im Quadrat sind gleich groß.	$\wedge$	Die Seiten des Quadrats sind gleich lang.	
Rom ist die Hauptstadt Spaniens.	$\wedge$	Paris liegt an der Elbe.	
9 ist Teiler von 108.	$\wedge$	9 ist Teiler von 136.	
42 ist ein Vielfaches von 8.	$\wedge$	32 ist ein Vielfaches von 4.	

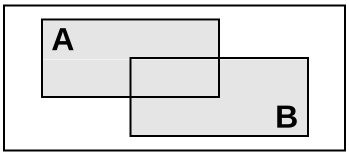
3.2.2 Die Disjunktion (Junktor: $\vee$)

auch: ODER-Verknüpfung, OR, logische Addition, logische Summe, inklusives ODER, Adjunktion, Alternation

Die ODER-Aussage ist wahr, wenn **wenigstens eine** Teilaussage wahr ist.
Die ODER-Aussage ist falsch, wenn **alle** Teilaussagen falsch sind.

Beispiele:

Aussage A		Aussage B	A	B	$A \vee B$
Dresden ist eine deutsche Stadt.	$\vee$	Dresden liegt an der Elbe.	w	w	w
Dresden ist eine deutsche Stadt.	$\vee$	Dresden liegt am Rhein.	w	f	w
Dresden ist eine polnische Stadt.	$\vee$	Dresden liegt an der Elbe.	f	w	w
Dresden ist eine polnische Stadt.	$\vee$	Dresden liegt am Rhein.	f	f	f



27.) Welche der folgenden **ODER-Verknüpfungen** sind wahr?

Riesa liegt an der Elbe.	$\vee$	Hamburg liegt am Rhein.	
Die Winkel im Quadrat sind gleich groß.	$\vee$	Die Seiten des Quadrats sind gleich lang.	
Rom ist die Hauptstadt Spaniens.	$\vee$	Paris liegt an der Elbe.	
9 ist Teiler von 108.	$\vee$	9 ist Teiler von 136.	
42 ist ein Vielfaches von 8.	$\vee$	32 ist ein Vielfaches von 4.	

28.) Verknüpfen Sie jeweils folgende zwei Aussagen zu einer **ODER-Aussage**!

Fritz trinkt Bier. Fritz trinkt Wein.	
Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands. Berlin ist die Hauptstadt Frankreichs.	
Fritz spielt Fußball. Fritz spielt Handball.	

29.) **Kürzen Sie folgende Aussagen! Veranschaulichen Sie die Lösungsmenge!**

a)	$(A \wedge B) \wedge (A \vee B)$	
b)	$(A \wedge B) \vee (A \vee B)$	
c)	$(A \vee B) \vee (A \vee C)$	
d)	$([A \wedge B] \vee C) \wedge A$	
e)	$([B \vee C] \wedge A) \wedge B$	

a)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \wedge (A \vee B)$	
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

b)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$(A \wedge B) \vee (A \vee B)$	
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

c)

A	B	C	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \vee (A \vee C)$	
w	w	w				
w	w	f				
w	f	w				
w	f	f				
f	w	w				
f	w	f				
f	f	w				
f	f	f				

d)

A	B	C	$[A \wedge B]$	$[A \wedge B] \vee C$	$([A \wedge B] \vee C) \wedge A$	
w	w	w				
w	w	f				
w	f	w				
w	f	f				
f	w	w				
f	w	f				
f	f	w				
f	f	f				

e)

A	B	C	$[B \vee C]$	$[B \vee C] \wedge A$	$([B \vee C] \wedge A) \wedge B$	
w	w	w				
w	w	f				
w	f	w				
w	f	f				
f	w	w				
f	w	f				
f	f	w				
f	f	f				

3.2.3 Die Negation (Junktor: $\neg$)

auch: Verneinung, Inversion

Im Gegensatz zu allen anderen Verknüpfungsarten ist die Negation eine einstellige Verknüpfung.

z. B.:	$\neg A$	"nicht A"
	$\neg (\neg A)$	Die Negation der Negation von A ergibt A.
	$A \wedge (\neg A)$	A und nicht A ergibt den Wahrheitswert falsch.

30.) Interpretieren Sie folgende Aussagen!

$\neg$ (Prag ist die Hauptstadt von Polen.)	
$\neg (2^3 = 3^2)$	
$\neg$ (Fritzchen ist älter als 10 Jahre.)	

31.) Verneinen Sie die folgende Aussage!

Die BRD wurde 1972 Fußball-Weltmeister.	

32.) Verknüpfen Sie für $x_i \in N$ und $x_i \leq 7$ die beiden Aussagen "A ist Teiler von 12" und "B ist Teiler von 15":

a)	$A \wedge B$
b)	$\overline{A} \wedge B$
c)	$A \wedge \overline{B}$
d)	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
e)	$\overline{A \wedge B}$
f)	$A \vee B$
g)	$\overline{A} \vee B$
h)	$A \vee \overline{B}$
i)	$\overline{A} \vee \overline{B}$
j)	$\overline{A \vee B}$

33.) Verknüpfen Sie für $x_i \in N$ und $1 < x_i < 10$ die beiden Aussagen "A ist eine gerade Zahl" und "B ist eine Primzahl":

a)	$A \wedge B$
b)	$\overline{A} \wedge B$
c)	$A \wedge \overline{B}$
d)	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
e)	$\overline{A \wedge B}$
f)	$A \vee B$
g)	$\overline{A} \vee B$
h)	$A \vee \overline{B}$
i)	$\overline{A} \vee \overline{B}$
j)	$\overline{A \vee B}$

34.) Verknüpfen Sie für $x_i \in N$ und $2 < x_i \leq 7$ die beiden Aussagen
"A ist eine ungerade Zahl" und "B ist Teiler von 24":

a)	$A \wedge B$
b)	$\overline{A} \wedge B$
c)	$A \wedge \overline{B}$
d)	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
e)	$\overline{A \wedge B}$
f)	$A \vee B$
g)	$\overline{A} \vee B$
h)	$A \vee \overline{B}$
i)	$\overline{A} \vee \overline{B}$
j)	$\overline{A \vee B}$

35.) Verknüpfen Sie für $x_i \in N$ und $2 < x_i \leq 9$ die beiden Aussagen
"A ist durch 3 teilbar" und "B ist eine gerade Zahl":

a)	$A \wedge B$
b)	$\overline{A} \wedge B$
c)	$A \wedge \overline{B}$
d)	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
e)	$\overline{A \wedge B}$
f)	$A \vee B$
g)	$\overline{A} \vee B$
h)	$A \vee \overline{B}$
i)	$\overline{A} \vee \overline{B}$
j)	$\overline{A \vee B}$

36.)	Verknüpfen Sie für $x_i \in N$ und $3 \leq x_i < 9$ die beiden Aussagen "A ist Teiler von 12" und "B ist Teiler von 18":

a)	$A \wedge B$
b)	$\overline{A} \wedge B$
c)	$A \wedge \overline{B}$
d)	$\overline{A} \wedge \overline{B}$
e)	$\overline{A \wedge B}$
f)	$A \vee B$
g)	$\overline{A} \vee B$
h)	$A \vee \overline{B}$
i)	$\overline{A} \vee \overline{B}$
j)	$\overline{A \vee B}$