Aus der Reihe „Mathematik – leicht verständlich“:

Das Integralrechnen

von Dr. Detlef Bommhardt

Dresden, Dezember 2023

Das Integralrechnen

1 Das Integralrechnen mit Integrationsgrenzen

Mithilfe der Integralrechnung können Flächeninhalte berechnet werden, z. B. zwischen mehreren Funktionen oder unterhalb einer Funktion.

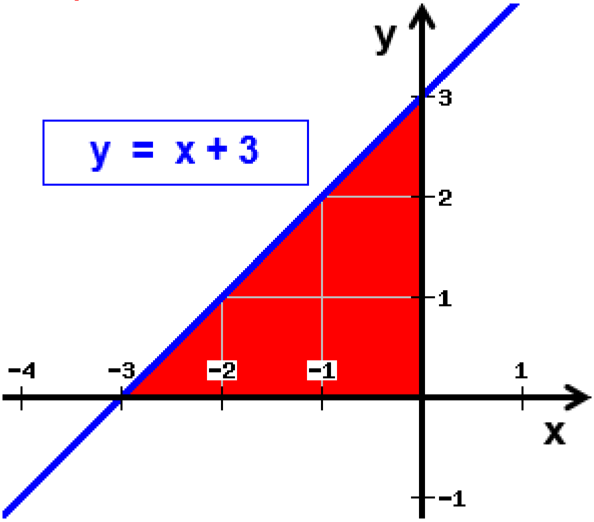
① $A = \int_{-3}^{0} (x + 3)\, dx$

② $= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-3}^{0}$

③ $= (\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0) - (\frac{1}{2} \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3))$

$= \quad 0 \quad - (\frac{1}{2} \cdot 9 \quad - \quad 9 \quad)$

$=$ **4,5 FE**



Arbeitsschritte beim Integrieren:

① Die Funktion **$y = x + 3$** integrieren.
(Ergebnis: $\frac{1}{2}x^2 + 3x$)

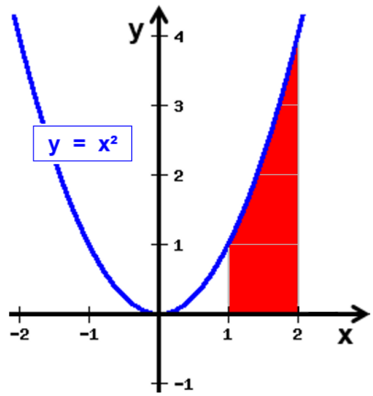
② Diese Stammfunktion (hier: $\frac{1}{2}x^2 + 3x$) wird in eckige Klammern gesetzt und mit den Integrationsgrenzen versehen.
Im Beispiel ist die obere Grenze = 0 und die untere Grenze = –3.

③ Funktion mit den beiden Integrationsgrenzen ausrechnen.

1.) Berechnen Sie für das Intervall

$1 \leq x \leq 2$

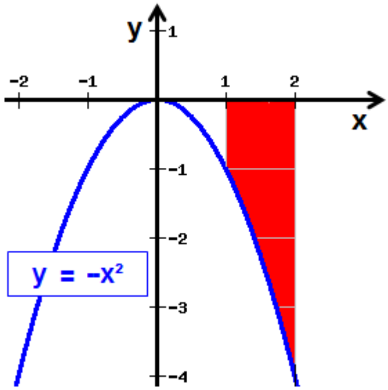
den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = x^2$** und der x-Achse!



2.) Berechnen Sie für das Intervall

$$1 \leq x \leq 2$$

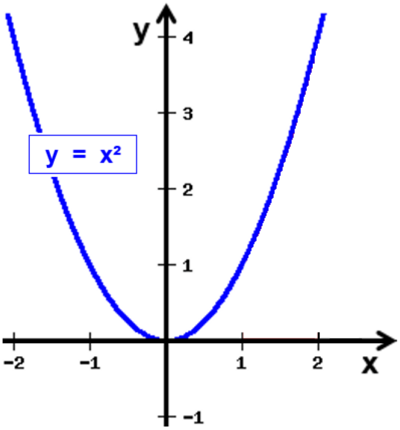
den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = -x^2$** und der x-Achse!



2 Der Unterschied zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral

Ein unbestimmtes Integral besitzt keine Integrationsgrenzen, die Lösung einer Aufgabe mit einem unbestimmten Integral ist eine Stammfunktion.

Beispiel:
Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = x^2$** und der x-Achse!



$$A = \int x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 + C \right]$$

Ein bestimmtes Integral besitzt Integrationsgrenzen, die Lösung einer Aufgabe mit einem bestimmten Integral ist ein einfacher Zahlenwert.

$$A = \int_1^2 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 + C \right]_1^2$$

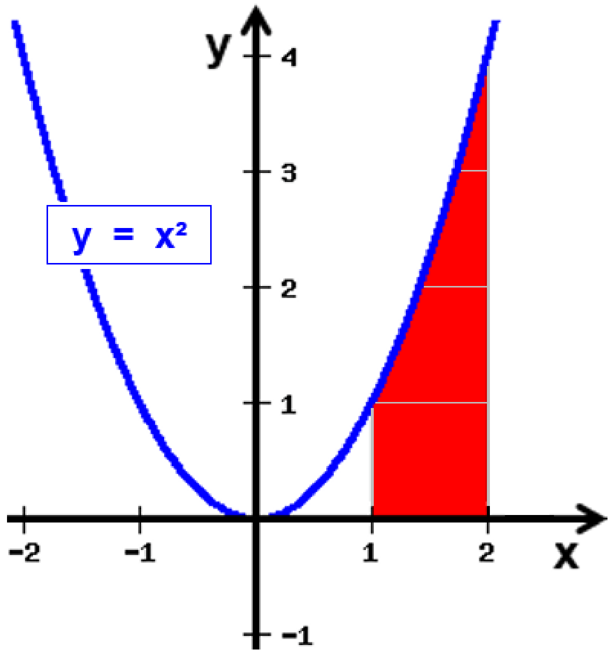
$$= {}^1/_3 \cdot 2^3 + C - ({}^1/_3 \cdot 1^3 + C)$$

$$= \quad {}^8/_3 \quad + C - \quad {}^1/_3 \quad - \ C$$

$$= \quad \mathbf{{}^7/_3}$$

$$= \mathbf{2^1/_3 \ FE}$$

Beim bestimmten Integral hat die additive Konstante C keinen Einfluss auf den Zahlenwert.

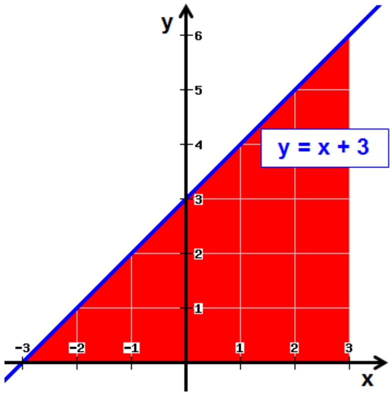


3 Der Wechsel über die x-Achse beim bestimmten Integral

3.) Berechnen Sie für das Intervall

$$-3 \leq x \leq 3$$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = x + 3$** und der x-Achse!



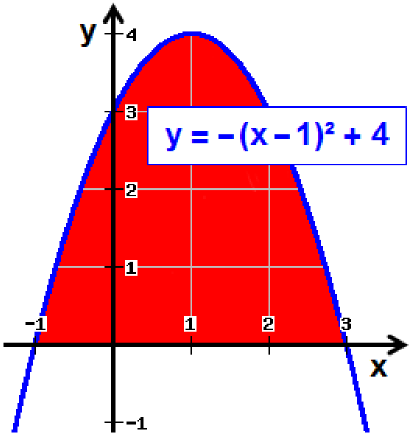
4.) Berechnen Sie für das Intervall

$-1 \leq x \leq 3$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion

$y = -(x-1)^2 + 4$

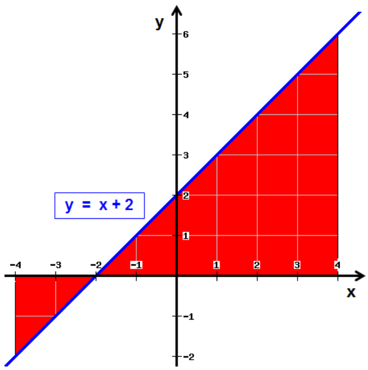
und der x-Achse!



5.) Berechnen Sie für das Intervall

$-4 \leq x \leq 4$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = x + 2$** und der x-Achse!



$$A = \int_{-4}^{4} (x + 2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-4}^{4}$$

$$= (\tfrac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4) - (\tfrac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4))$$

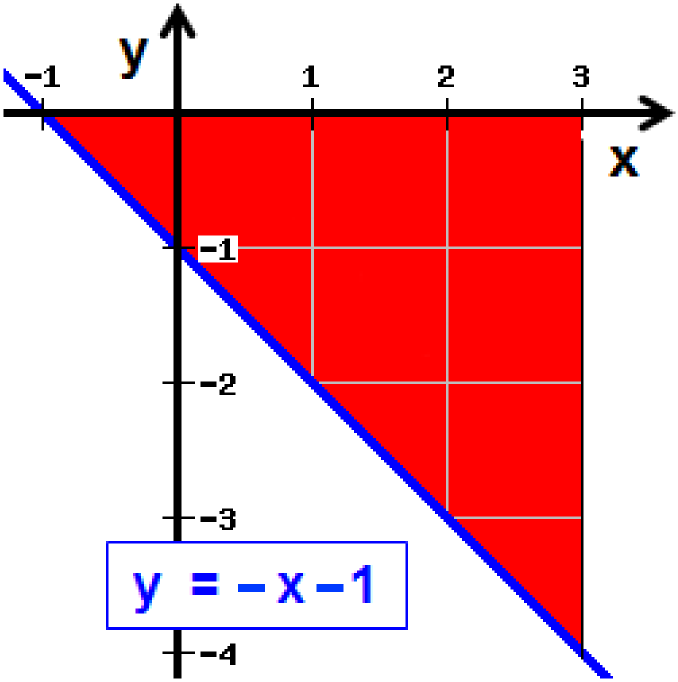
$$= (\ 8 \quad + \ 8\ ) - (\ 8 \quad - \ 8\ )$$

$$= \quad 16 \quad - \quad 0$$

$= \mathbf{16\ FE}$ **Falsch!**

Achtung beim Wechsel über die x-Achse!
Der Wechsel über die y-Achse ist problemlos.

6.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \leq x \leq 3$ den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und der Funktion **$y = -x - 1$** !

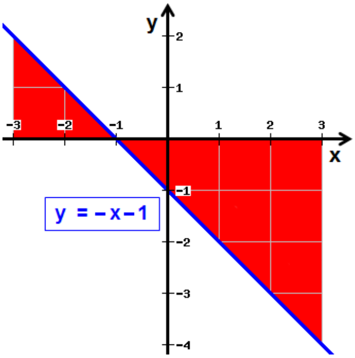


7.) Berechnen Sie für das Intervall

$-3 \le x \le 3$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion

$y = -x - 1$ und der x-Achse!



$$A = \int_{-3}^{3} (-x-1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-3}^{3}$$

$$= (-\tfrac{1}{2} \cdot 3^2 - 3) - (-\tfrac{1}{2} \cdot (-3)^2 - (-3))$$

$$= -7{,}5 + 1{,}5$$

$$= |-6|$$

= **6 FE** **Falsch!**

Achtung beim Wechsel über die x-Achse!

8.) Berechnen Sie folgende Integrale!

a) $\int_{-2}^{0} x \, dx$

$=$

$=$

$=$

b) $\int_{0}^{2} x^2 \, dx$

$=$

$=$

$=$

c) $\int_{-1}^{2} (2 - x) \, dx$

$=$

$=$

$=$

$=$

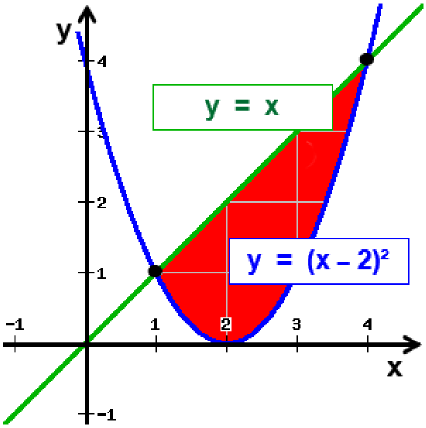
4 Das Berechnen des Flächeninhalts zwischen zwei Funktionen

9.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen

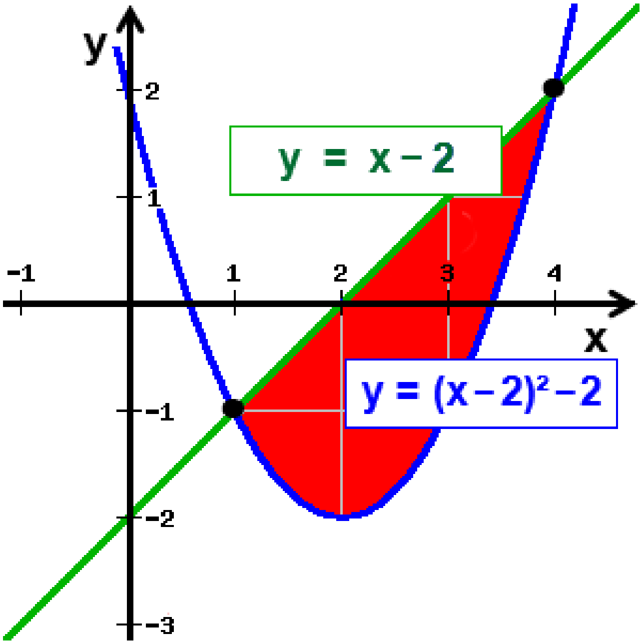
$y = (x - 2)^2$

und $y = x$

eingeschlossen wird!

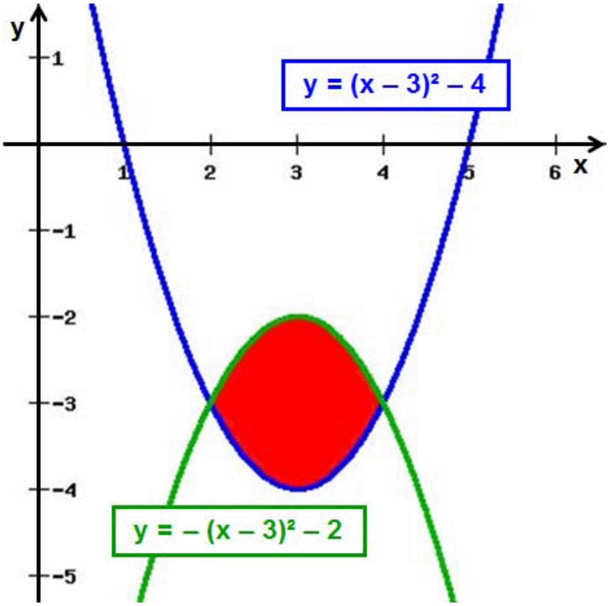


10.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen $y = (x - 2)^2 - 2$ und $y = x - 2$ eingeschlossen wird!

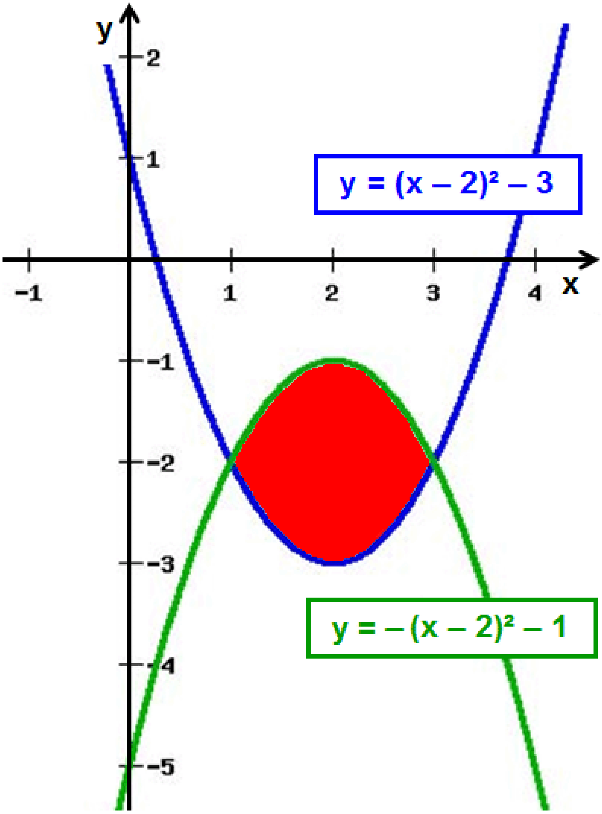


15

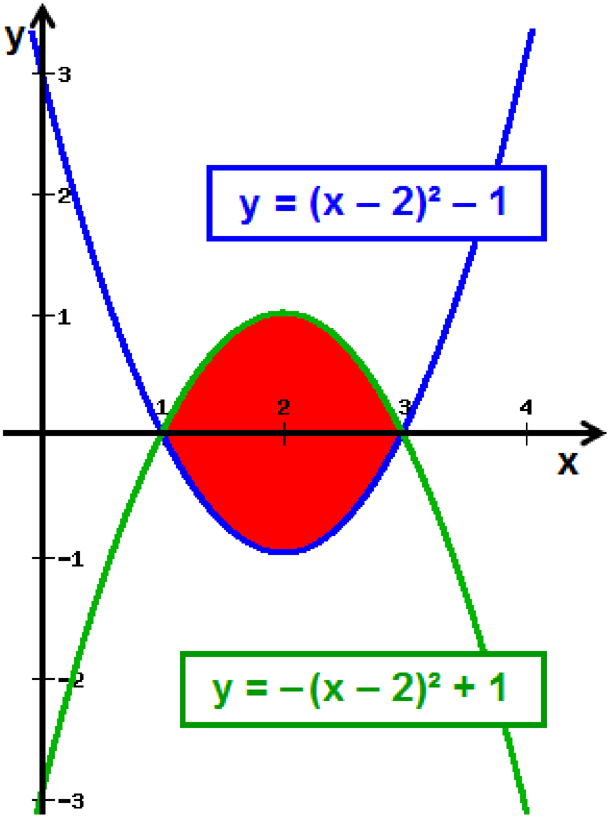
11.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen $y = (x - 3)^2 - 4$ und $y = -(x - 3)^2 - 2$ eingeschlossen wird!



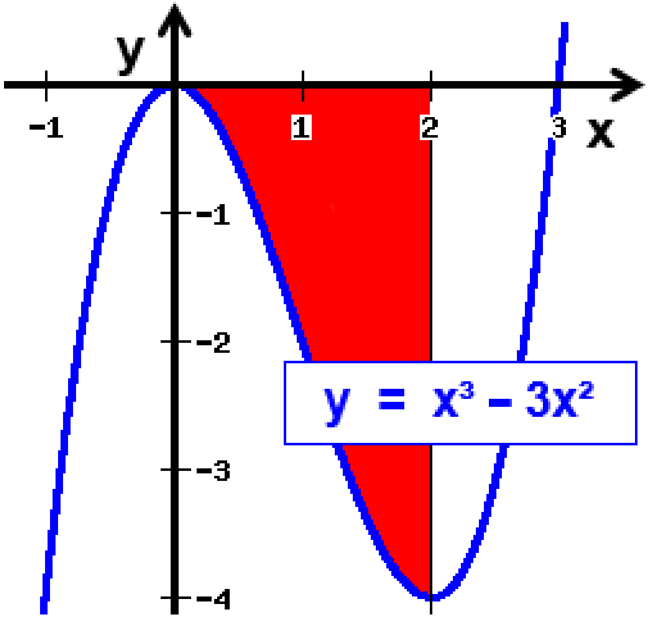
12.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen $y = (x - 2)^2 - 3$ und $y = -(x - 2)^2 - 1$ eingeschlossen wird!



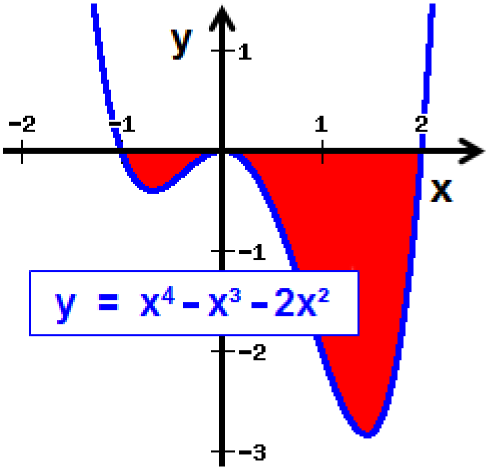
13.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen $y = (x - 2)^2 - 1$ und $y = -(x - 2)^2 + 1$ eingeschlossen wird!



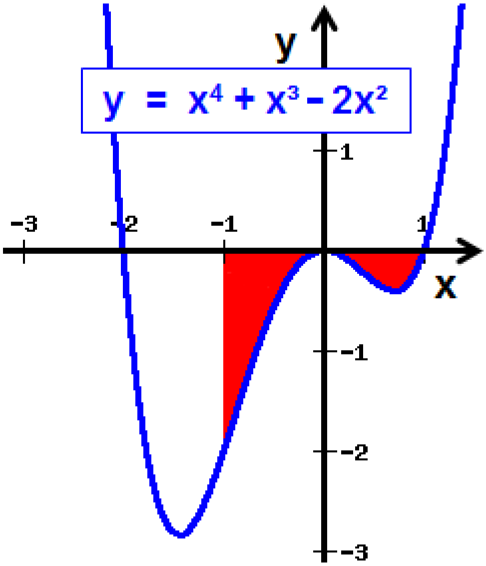
14.) Berechnen Sie für das Intervall $0 \le x \le 2$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = x^3 - 3x^2$ und der x-Achse!



15.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \le x \le 2$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^4 - x^3 - 2x^2$ und der x-Achse!



16.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^4 + x^3 - 2x^2$ und der x-Achse!



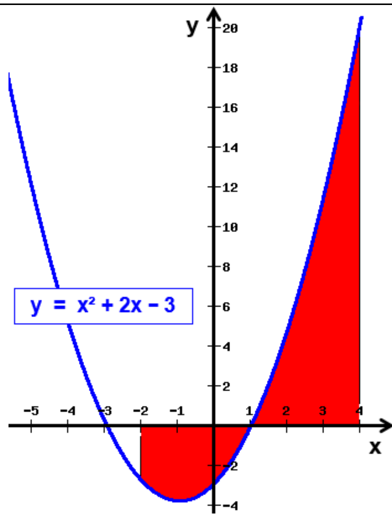
17.) Berechnen Sie für das Intervall

$$-2 \leq x \leq 4$$

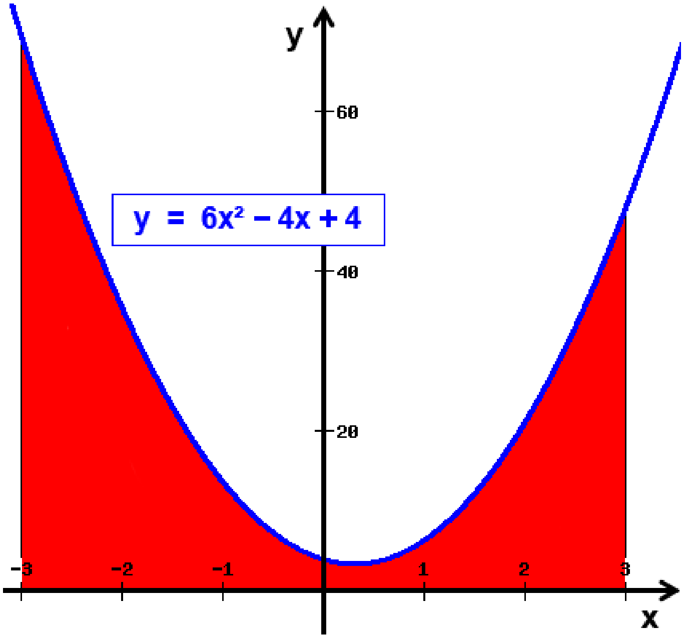
den Flächeninhalt zwischen der Funktion

$$\mathbf{y = x^2 + 2x - 3}$$

und der x-Achse!

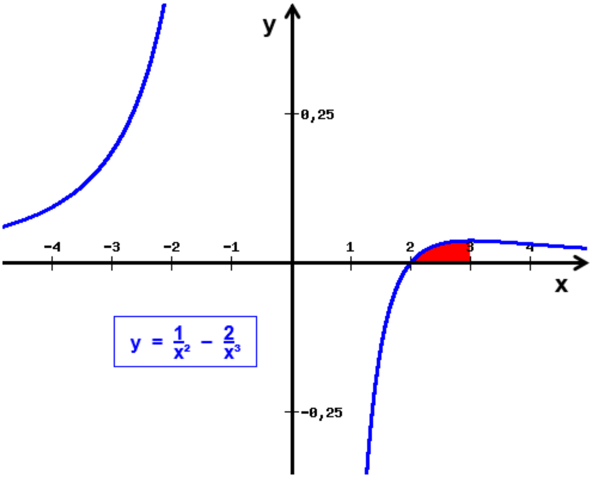


18.) Berechnen Sie für das Intervall $-3 \le x \le 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = 6x^2 - 4x + 4$ und der x-Achse!

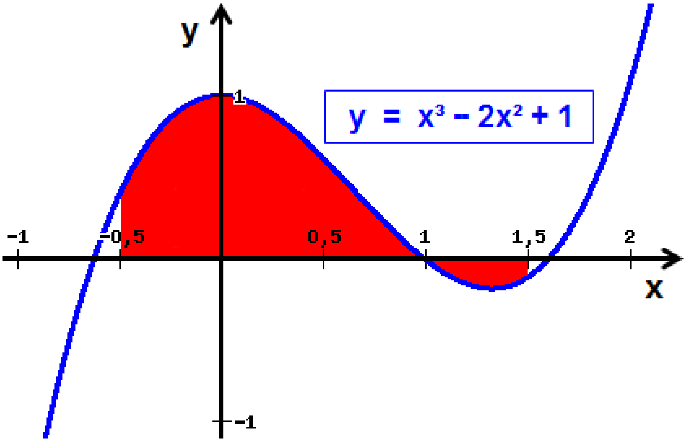


19.) Berechnen Sie für das Intervall $2 \le x \le 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion

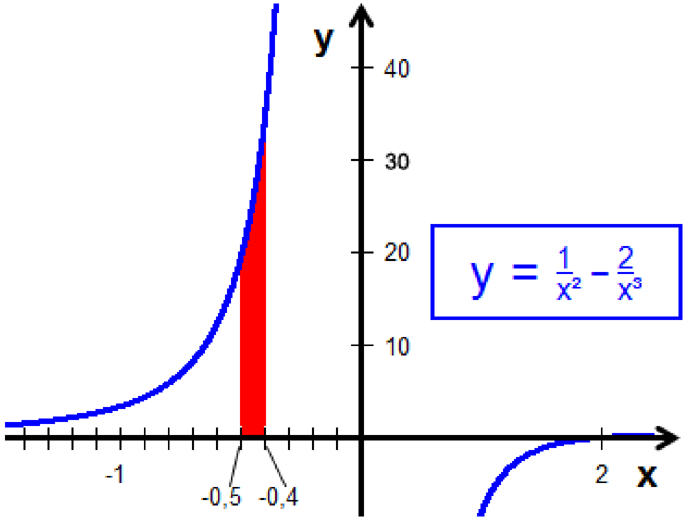
$y = {}^{1}/_{x^2} - {}^{2}/_{x^3}$ und der x-Achse!



20.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^3 - 2x^2 + 1$ und der x-Achse!



21.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \le x \le -0{,}4$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = {}^{1}/_{x^2} - {}^{2}/_{x^3}$ und der x-Achse!



$$A = \int_{-0,5}^{-0,4} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right]_{-0,5}^{-0,4}$$

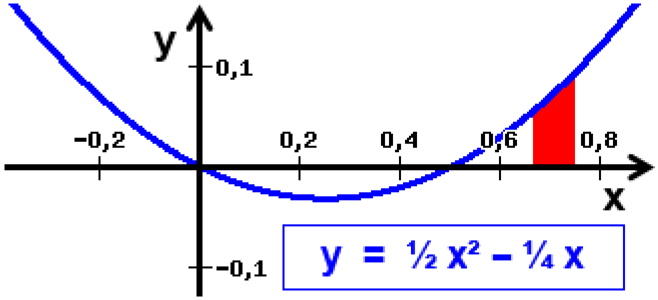
$$= \left(-{}^{1}/_{-0,4} + {}^{1}/_{0,16}\right) - \left(-{}^{1}/_{-0,5} + {}^{1}/_{0,25}\right)$$

$$= +\,{}^{10}/_{4} \quad + {}^{100}/_{16} \quad - \quad {}^{10}/_{5} \quad - {}^{100}/_{25}$$

$$= \quad 2{,}5 \quad + 6{,}25 \quad - \quad 2 \quad - \quad 4$$

$$= \mathbf{2{,}75\ FE}$$

22.) Berechnen Sie für das Intervall $^2/_3 \leq x \leq {}^3/_4$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x$ und der x-Achse!



23.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $\int_3^x (2t - 4)\, dt = 8$

24.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $\int_2^x 3t^2 \, dt = 56$

25.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $$\int_{-3}^{x} (2t + 2)\, dt = 5$$

26.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $$\int_0^x (2t^2 - t)\,dt = 0$$

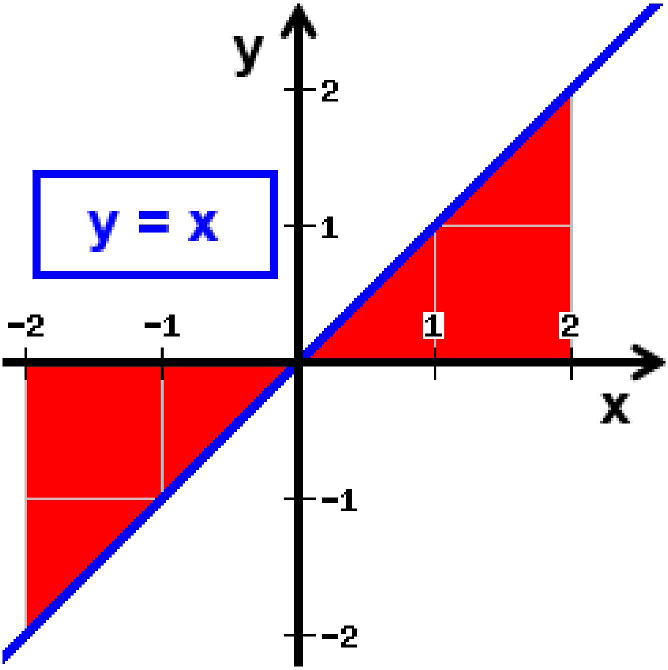
Hinweis: Eine 0 Einheiten große Fläche erhält man bei identischer unterer und oberer Integrationsgrenze oder wenn Teilflächen oberhalb und unterhalb durch die x-Achse begrenzt werden.

27.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $\int_1^x (3t^2 - 2t - 3)\, dt \;=\; 0$

28.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_{-2}^{2} ax\,dx$$



29.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

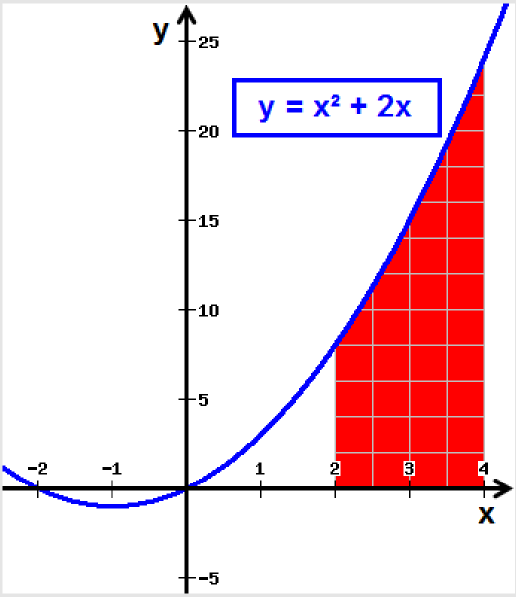
$$\int_{2}^{2a} ax^2 \, dx$$

30.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_3^4 (-x^2 + 4x)\, dx$$

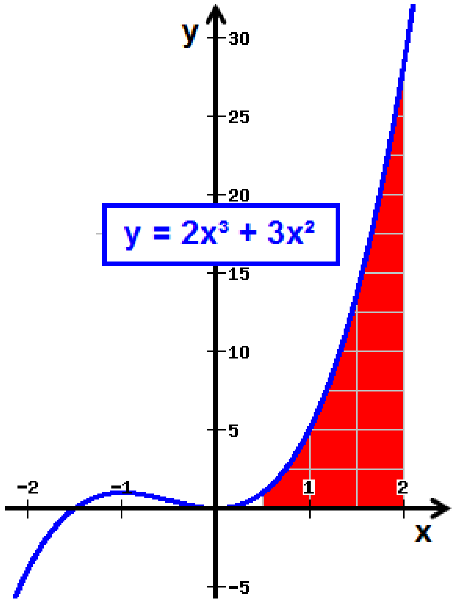
31.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_{2}^{4} (x^2 + 2x)\, dx$$



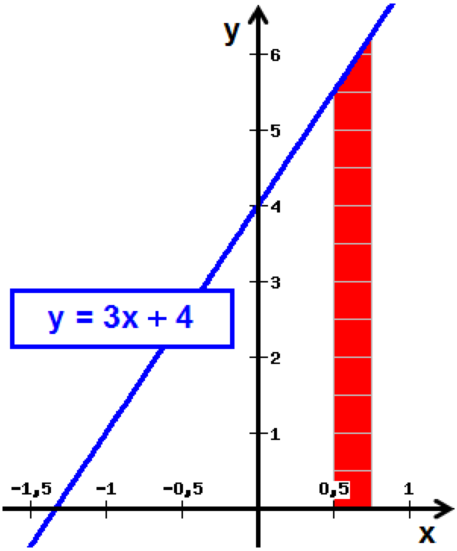
32.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_{0,5}^{2} (2x^3 + 3x^2)\, dx$$



33.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_{0,5}^{0,75} (3x + 4)\, dx$$



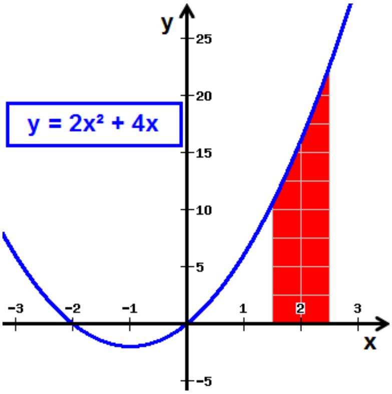
=

=

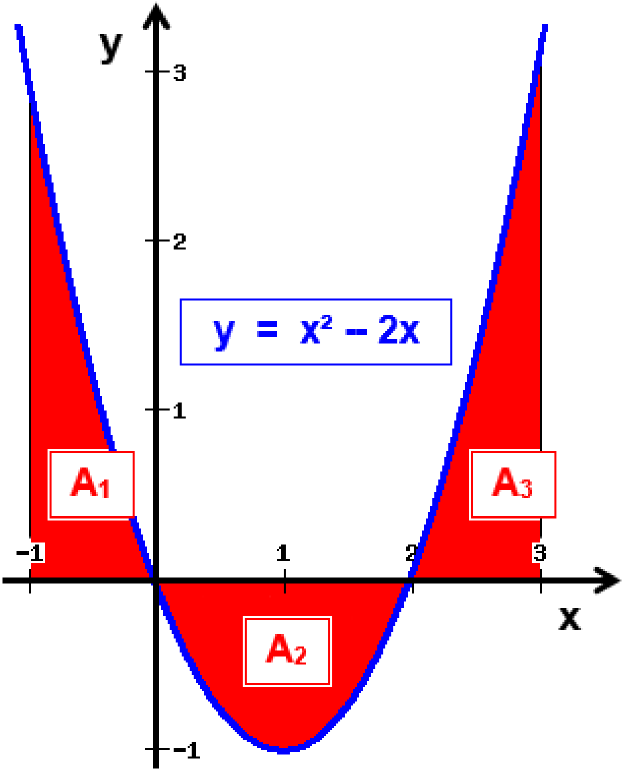
=

34.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

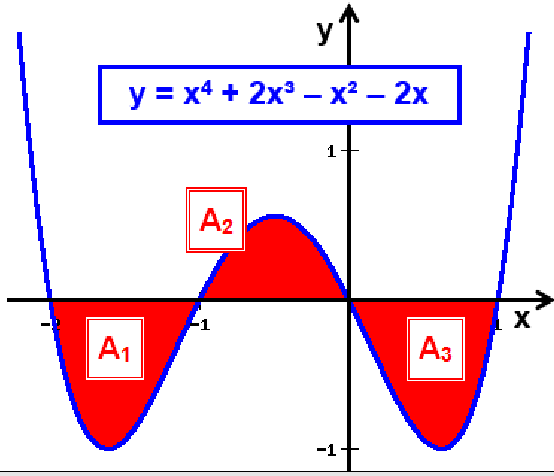
$$\int_{1,5}^{2,5} (2x^2 + 4x)\, dx$$



35.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \leq x \leq 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = x^2 - 2x$ und der x-Achse!



36.) Berechnen Sie für das Intervall $-2 \le x \le +1$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x \;=\; (x+2) \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-1)$
und der x-Achse!



37.) Berechnen Sie für das Intervall $-2{,}5 \leq x \leq +0{,}5$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion

$\mathbf{y = -x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x} = (-x^2 - 5x - 6) \cdot (x^2 - x)$

und der x-Achse!

38.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = x^2 - 2x$** und **$y = x$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

51

39.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = -x^2 + 3$** und **$y = -2x$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

40.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = x + 1$** und **$y = \frac{1}{2} x^2 - x - 1{,}5$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

41.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ die durch die Funktion $\mathbf{y = x^2 - 2x - 3}$ und die x-Achse eingeschlossene Fläche!

Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der Funktion!

42.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von den beiden Funktionen **$y = 2x^3$** und **$y = 3x^2 - 1$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie die Schnittpunkte beider Funktionen!

43.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von den Funktionen $y = x^4 + x^2$ und $y = -x^2 + 3$ eingeschlossen wird!

44.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von den Funktionen **$y = x^3 + x^2 - 4x - 4$** und **$y = -x^3 - x^2 + 4x + 4$** eingeschlossen wird?

45.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von der Funktion **$y = x^3 – 1,5x^2 – 5½x + 3$** und der x-Achse zwischen der ersten Nullstelle und x = +2 eingeschlossen wird? Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei x = +½.

46.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ die durch die Funktion $\mathbf{y = 8x^4 + x^2 - 9}$ und die x-Achse eingeschlossene Fläche!

47.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von der Funktion **$y = 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 6x$** und der x-Achse zwischen der ersten und der vierten Nullstelle eingeschlossen wird! Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei $x = -1$.

48.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von der Funktion **$y = 0{,}75x^4 - 1{,}5x^3 - 0{,}75x^2 + 1{,}5x$** und der x-Achse zwischen der ersten und der vierten Nullstelle eingeschlossen wird! Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei x = +**2**.

49.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von den beiden Funktionen **$y = 0{,}25x^3 - 2{,}5x^2 + 6{,}25x$** und **$y = 4{,}5 - 0{,}5x$** eingeschlossen wird?

Innerhalb der Reihe „Mathematik – leicht verständlich“ erschienen bisher die Broschüren

Das Kopfrechnen

Das Bruchrechnen

Das Dreisatzrechnen

Das Prozentrechnen

Das Zinsrechnen

Das Diskontrechnen

Die Gleichungen

Die Funktionen

Die Boolesche Algebra

Die Zahlensysteme

Die Kombinatorik

Das Wahrscheinlichkeitsrechnen

Die Partialdivision

Das Integralrechnen

Das Differenzialrechnen

Die komplexen Zahlen

Die Finanzmathematik