Aus der Reihe „Mathematik – leicht verständlich“:

Die lineare Optimierung

von Dr. Detlef Bommhardt

Dresden, Januar 2023

Die lineare Optimierung

1 Die Gleichungen und die Ungleichungen

In der Wirtschaft sind häufig Entscheidungen unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen zu treffen: Aufteilung der vorhandenen Mittel auf konkurrierende Verwendungszwecke, Erzielenwollen eines Nutzenmaximums, Erreichen eines vorgegebenen Ziels mit minimalem Mitteleinsatz.
Gesucht werden dabei ein Maximum (z. B. an Gewinn) oder ein Minimum (an Verlust).

Bei Problemen der linearen Optimierung (auch: lineare Programmierung, lineare Planungsrechnung) sind sowohl die so genannte Zielfunktion als auch alle ihre Nebenbedingungen linear; d. h., lineare (Un-)Gleichungen.

1.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die Ungleichung $5 \cdot x + 7 \leq 8 \cdot x - 2$!

2.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die Ungleichung $\frac{3}{4} \cdot x - \frac{2}{3} \geq 1\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{12}$!

3.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die Ungleichung $\frac{3}{4} \cdot x - 1\frac{1}{2} \leq 1\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4}$!

4.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die Ungleichung $1 - 2 \cdot x \leq x - 5$!

5.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die Ungleichung $\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \geq 1\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4}$!

6.) Welche **natürlichen** Zahlen x_i gehören zur Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{4} \cdot x + 2\frac{3}{4} \leq 12\frac{1}{2} \cdot x - 2\frac{1}{2}$?

7.) Welche **natürlichen** Zahlen x_i gehören zur Lösungsmenge der Ungleichung

$$3 \cdot (\frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{4}) \leq -2 \cdot (1\frac{1}{2} \cdot x - 3\frac{3}{4})$$?

8.) Welche **natürlichen** Zahlen x_i gehören zur Lösungsmenge der Ungleichung

$$\tfrac{3}{4} \cdot (2 \cdot x - \tfrac{1}{2}) \;\geq\; -\tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot x + 4\tfrac{1}{2})\ ?$$

9.) Welche **natürlichen** Zahlen x_i gehören zur Lösungsmenge der Ungleichung

$$4 \cdot (2\tfrac{3}{4} \cdot x + \tfrac{1}{2}) \;\geq\; -6 \cdot (-2\tfrac{1}{2} \cdot x + 2\tfrac{3}{4})\ ?$$

10.) Welche **natürlichen** Zahlen x_i gehören zur Lösungsmenge der Ungleichung

$$\tfrac{3}{4} \cdot (2 \cdot x - \tfrac{1}{2}) \leq -\tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot x + 4\tfrac{1}{2})\ ?$$

11.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die beiden Ungleichungen

$$1\tfrac{1}{2}\,x - 2\tfrac{1}{2} \leq 3\tfrac{1}{4}\,x + 4\tfrac{3}{4} \quad \text{und} \quad 5x + 3\tfrac{3}{4} \geq \tfrac{1}{2}\,x - 2\tfrac{1}{4}\ !$$

12.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die beiden Ungleichungen

$2 \cdot (3x - 5\tfrac{1}{2}) \leq 4 \cdot (2x + 6)$ und $2\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4} \geq 5\tfrac{1}{2}x - 3\tfrac{3}{4}$

13.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die beiden Ungleichungen

$-8 \cdot (2x - 6\tfrac{1}{4}) \geq 3 \cdot (7x - 8)$ und $2x + 2\tfrac{1}{2} \leq 6x - 5\tfrac{1}{2}$!

14.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die beiden Ungleichungen

$$-\tfrac{3}{4}x - 4\tfrac{1}{2} \geq \tfrac{1}{2}x - 2 \quad \text{und} \quad 2\tfrac{3}{4}x - 1 \geq 1\tfrac{1}{4}x - 10\ !$$

15.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die beiden Ungleichungen

$$-1\tfrac{1}{2}x + 2 \geq x - 8 \quad \text{und} \quad x - 1 \geq \tfrac{1}{4}x - 2\tfrac{1}{2}\ !$$

16.)	Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die folgenden Ungleichungen!	I $x \leq 1\frac{1}{2}$ II $x \geq 1$ III $x \leq 4$ IV $x \geq -\frac{1}{3}$ V $x \leq 2$

17.)	Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die folgenden Ungleichungen!	I $x \leq \frac{5}{2}$ II $x \geq -7$ III $x \leq 3$ IV $x \geq -6$ V $x \leq 7$

18.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die folgenden Ungleichungen!

I	$3x + 2$	$\leq$	$x + 8$
II	$2x + 1$	$\geq$	$5x - 14$
III	$x - 2$	$\leq$	$6x + 8$

19.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für die folgenden Ungleichungen!

I	$1\frac{1}{2}\,x - 5$	$\leq$	$4x - 10$
II	$-2 \cdot (-4x - 2\frac{1}{2})$	$\geq$	$4 \cdot (x + 2)$
III	$\frac{1}{2} \cdot (6x + 4)$	$\leq$	$4 \cdot (\frac{1}{4}\,x + 3)$
IV	$\frac{1}{4} \cdot (4x + 48)$	$\geq$	$\frac{1}{2} \cdot (8x - 30)$
V	$-2 \cdot (x + 1)$	$\leq$	$4 \cdot (-1\frac{1}{4}\,x + 4)$

20.)	Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!	I $x_2 \leq -\frac{1}{2} x_1 + 25$ II $x_2 \leq -2\frac{1}{2} x_1 + 40$ III $x_2 \leq -\frac{1}{9} x_1 + 20$ IV $x_1 \geq 0$ V $x_2 \geq 0$

21.) Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!

I	$x_1 + 3x_2$	$\geq$	4
II	$-x_1 + 2x_2$	$\geq$	-1
III	$2x_1 + 4x_2$	$\leq$	8
IV	x_1	$\geq$	0
V	x_2	$\geq$	0

22.)	Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!	I	$x_1 \geq 0$
		II	$x_2 \geq 0$
		III	$-x_1 + 2x_2 \geq -1$
		IV	$-\frac{1}{2} x_1 - 2x_2 \leq -8$

23.) Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!

I	$3x_1 - 2x_2 \leq 6$
II	$-3x_1 - 2x_2 \leq 6$
III	$x_1 \geq 0$
IV	$x_2 \leq 0$

24.) Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!

I	$-x_1 + x_2$	$\geq$	-40
II	$0{,}2x_1 + x_2$	$\leq$	20
III	$x_1 + x_2$	$\geq$	30
IV	x_1	$\geq$	0
V	x_2	$\geq$	0

25.)	Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!	I	$-0{,}4x_1 + 2x_2 \leq 2$
		II	$x_1 + 2x_2 \leq 6$
		III	$x_1 \geq 0$
		IV	$x_2 \geq 0$

26.) Ein Werk nutzt drei Maschinen (M1, M2 und M3), um in einem dreistufigen Produktionsprozess die Produkte 1 und 2 in den Mengen x_1 und x_2 alternativ hergestellt werden können. Jedes Produkt muss alle drei Maschinen hintereinander in der Reihenfolge M1, M2 und M3 durchlaufen.

Der Gewinn beträgt bei Produkt 1 50 Euro/Stück, bei Produkt 2 100 Euro/Stück. Die Kapazität jeder Maschine ist auf 40 Stunden pro Woche (= 2.400 Minuten/ Woche) beschränkt. Die Bearbeitungszeiten der beiden Produkte auf den drei Maschinen betragen:

	notwendige Bearbeitungszeit für ein Stück des Produkts 1	notwendige Bearbeitungszeit für ein Stück des Produkts 2
M1	15 Minuten	48 Minuten
M2	30 Minuten	40 Minuten
M3	40 Minuten	20 Minuten
	85 Minuten	108 Minuten

Wie viele Produkte 1 (x_1) und 2 (x_2) müssen produziert werden, um einen maximalen Gewinn zu erreichen?

27.) Für die Herstellung der Güter A und B werden drei Stoffe in bestimmten Mengen benötigt. Die Verkaufspreise der Güter betragen 6 Euro (für A) und 8 Euro (für B).

	benötigte Menge Gut A	benötigte Menge Gut B	verfügbarer Vorrat
Stoff 1	3 kg pro Stück	5 kg pro Stück	50 kg
Stoff 2	4 kg pro Stück	1 kg pro Stück	36 kg
Stoff 3	1 kg pro Stück	1 kg pro Stück	12 kg

Ermitteln Sie wie viel Stück von A und B verkauft werden müssen, damit ein maximaler Umsatz erzielt wird!

28.) Ein Werk produziert Stahl. Dazu benötigt es drei Metalle, die in deutschem und schwedischem Eisenerz enthalten sind:

	Metallgehalt je 10 t Eisenerz deutsch	schwedisch
Metall 1	2 t	1 t
Metall 1	6 t	5 t
Metall 1	1 t	2 t

Der jeweilige Rest zu den 10 t ist unbrauchbares Gestein.

Der Bezugspreis für deutsches Eisenerz beträgt 70 Euro je Tonne, der für schwedisches Erz 100 Euro je Tonne. Laut Lieferungsbedingungen der Erzgruben können immer nur 10 t bzw. ein Vielfaches davon bestellt werden. Für den Auftrag werden mindestens 70 t Metall 1, 300 t Metall 2 und 80 t Metall 3 benötigt. Es können mehr Tonnen von den einzelnen Metallen für den Stahl verwendet werden, aber nicht weniger.

Wie viel Tonnen von deutschem und schwedischem Erz müssen eingekauft werden, um die Beschaffungskosten an Erzen für den erhaltenen Auftrag zu minimieren?

29.) Ein Mopedhersteller baut und verkauft die beiden Typen Mofa und Lofa. Die Produktionskosten für ein Mofa betragen 5.000 Euro, für ein Lofa 3.000 Euro. Insgesamt können pro Tag nicht mehr als 30.000 Euro für die Produktion ausgegeben werden.
Täglich sollen maximal 3 Mofa gefertigt werden.
Marktanalysen zeigen, dass pro Tag mindestens 4 Lofa und unbegrenzt Mofa abgesetzt werden können. Der Verkaufspreis der Lofa liegt bei 5.000 Euro, der der Mofa bei 10.000 Euro pro Stück.

Wie viele Mofa und Lofa sollen täglich produziert werden, um das Umsatzmaximum zu erreichen?

Wie groß ist dieser maximale Umsatz?

Innerhalb der Reihe „Mathematik – leicht verständlich“ erschienen bisher die Broschüren

Das Kopfrechnen

Das Bruchrechnen

Das Dreisatzrechnen

Das Prozentrechnen

Das Zinsrechnen

Das Diskontrechnen

Die Gleichungen

Die Funktionen

Die lineare Optimierung

Die Boolesche Algebra

Die Zahlensysteme

Die Kombinatorik

Das Wahrscheinlichkeitsrechnen

Die Partialdivision

Das Integralrechnen

Das Differenzialrechnen

Die komplexen Zahlen

Die Finanzmathematik