Der Logarithmus

Zu jeder positiven Zahl b und zu jeder positiven Zahl $a \neq 1$ gibt es genau eine reelle Zahl c, für die gilt:

$\boxed{a = \sqrt[c]{b}}$ $\boxed{b = a^c}$ $\boxed{c = \log_a b}$

a ... Wurzelwert, Basis
b ... Radikant, Numerus
c ... (Wurzel-)Exponent

gelesen: „Logarithmus von b zur Basis a"

Für Logarithmen mit der Basis 2 wird **lb** (von „binär") geschrieben.

Für Logarithmen mit der Basis 10 („dekadischer Logarithmus") wird **lg** geschrieben.

Für Logarithmen mit der Basis e („natürlicher Logarithmus, e = 2,7182818...) wird **ln** geschrieben.

In der Mathematik besitzen der dekadische und der natürliche Logarithmus besondere Bedeutung.

Die Basis e wird beschrieben durch den Grenzwert $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

und durch die unendliche Reihe $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$

Logarithmengesetze

1. Logarithmengesetz: Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

$$\boxed{\log_a (b \cdot c) \;=\; \log_a b + \log_a c}$$

2. Logarithmengesetz: Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus den Logarithmen des Dividenden und des Divisors.

$$\boxed{\log_a \frac{b}{c} \;=\; \log_a b - \log_a c}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\log_3 \frac{1}{7} &= \log_3 1 - \log_3 7\\ &= \;\;0 \;\;- \log_3 7\\ &= -\log_3 7\end{aligned}$$

3. Logarithmengesetz: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem mit dem Potenzexponenten multiplizierten Logarithmus der Potenzbasis.

$$\boxed{\log_a (b^c) \;=\; c \cdot \log_a b}$$

Beispiel:

$$\log_a \frac{7^3x^2}{8^3} = 3 \cdot \log_a 7 + 2 \cdot \log_a x - 3 \cdot \log_a 8$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}\log_a a^b &= b \cdot \log_a a\\ &= b \cdot \;\; 1\\ &= b\end{aligned}$$

4. Logarithmengesetz: Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem durch den Wurzelexponenten geteilten Logarithmus des Radikanten.

$$\boxed{\log_a \;=\; \frac{1}{b} \cdot \log_a c}$$

Rechenoperationen der reellen Arithmetik

Stufe	Operation	Gesetz	Gleichung
1	Addition	Kommutativgesetz Assoziativgesetz	$a + b = b + a$ $(a + b) + c = a + (b + c)$
	Subtraktion	Umkehrung	$b - a = b + (-a) = -a + b$
2	Multiplikation	Kommutativgesetz Assoziativgesetz Distributivgesetz	$a \cdot b = b \cdot a$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$
	Division	Umkehrung Distributivgesetz	$\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a} = b \cdot a^{-1}$ $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$
3	Potenzieren	Distributivgesetz	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
	Radizieren	Distributivgesetz Umkehrung	
	Exponieren		$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
	Logarithmieren	Distributivgesetz	$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ $\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$

1.) Formulieren Sie im ersten Lösungskästchen jeweils die ausführliche Schreibweise für den Logarithmus-Ausdruck (z. B. **$\log_2$** für **lb** usw.)! Tragen Sie die Ergebnisse der Aufgaben jeweils in das zweite Lösungskästchen ein!

a)	lg 100	=	$\log_{10} 100$	=	**2**		h)	lb 0,5	=	$\log_2 0{,}5$	=	**–1**
b)	lb 4	=	$\log_2 4$	=	**2**		i)	lg 0,001	=	$\log_{10} 0{,}001$	=	**–3**
c)	lb 8	=	$\log_2 8$	=	**3**		j)	lb 0,25	=	$\log_2 0{,}25$	=	**–2**
d)	lg 0,1	=	$\log_{10} 0{,}1$	=	**–1**		k)	lb 1	=	$\log_2 1$	=	**0**
e)	lb 2	=	$\log_2 2$	=	**1**		l)	lg 1	=	$\log_{10} 1$	=	**0**
f)	lg 10	=	$\log_{10} 10$	=	**1**		m)	ln 1	=	$\log_e 1$	=	**0**
g)	$\log_a a$	=	$\log_a a$	=	**1**		n)	$\log_a 1$	=	$\log_a 1$	=	**0**

2.) Lösen Sie **lb 32 = ?** mithilfe des 1. Logarithmengesetzes!

$$\text{lb } 32 = \log_2 32 = 5$$

oder

$$\begin{aligned}\text{lb } 32 &= \text{lb } (4 \cdot 8)\\ &= \text{lb } 4 + \text{lb } 8\\ &= \log_2 4 + \log_2 8\\ &= 2 + 3\\ &= \mathbf{5}\end{aligned}$$

3.) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\log_a \frac{1}{19}$!

$$\begin{aligned}\log_a \frac{1}{19} &= \log_a 1 - \log_a 19\\ &= 0 - \log_a 19\\ &= \mathbf{-\log_a 19}\end{aligned}$$

4.) Ermitteln Sie den Wert für **lg 23,7** !

$$\begin{aligned}\text{lg } 23{,}7 = \log_{10} 23{,}7 &= \log_{10} (2{,}37 \cdot 10)\\ &= \log_{10} 2{,}37 + \log_{10} 10\\ &= 0{,}3747 \text{ (s. Tabelle)} + 1\\ &= \mathbf{1{,}3747}\end{aligned}$$

5.) **Ermitteln Sie den Wert für $\lg 0{,}0237$!**

$$\lg 0{,}0237 = \log_{10} 0{,}0237 = \log_{10} (2{,}37 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log_{10} 2{,}37 + \log_{10} 10^{-2}$$
$$= 0{,}3747 \text{ (s. Tabelle)} + (-2)$$
$$= \mathbf{-1{,}6253}$$

6.) **Ermitteln Sie den Wert für $\lg 4247$!**

$$\lg 4247 = \log_{10} 4247 = \log_{10} (4{,}247 \cdot 10^{3})$$
$$= \log_{10} 4{,}247 + \log_{10} 10^{3}$$

s. Tabelle: $\log_{10} 4{,}24 = 0{,}6274$
$\log_{10} 4{,}25 = 0{,}6284$

$$= 0{,}6281 + 3$$
(Interpolieren auf $\frac{7}{10}$)
$$= \mathbf{3{,}6281}$$

7.) **Ermitteln Sie x für $3 \cdot \log_3 x = 6$!**

$$3 \cdot \log_3 x = 6 \quad | :3$$
$$\log_3 x = 2$$
$$x = 3^2$$
$$x = \mathbf{9}$$

8.) **Ermitteln Sie x für $\log_4 \sqrt[5]{16} = x$!**

$$\log_4 \sqrt[5]{16} = x$$
$$\sqrt[5]{16} = 4^x$$
Hinweis: $16 = 4^2$
$$4^{\frac{2}{5}} = 4^x$$
$$x = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

9.) Ermitteln Sie x für **$\log_3 \sqrt[4]{27}$ = x** !

$$\log_3 \sqrt[4]{27} = x$$

$$\sqrt[4]{27} = 3^x \qquad \text{Hinweis: } 27 = 3^3$$

$$3^{\frac{3}{4}} = 3^x$$

$$x = \frac{3}{4}$$

10.) Ermitteln Sie x für **$\log_x \frac{64}{27}$ = 3** !

$$\log_x \frac{64}{27} = 3$$

$$\frac{64}{27} = x^3$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 = x^3$$

$$x = \frac{4}{3}$$

11.) Ermitteln Sie x für **$3 \cdot \log_2 x = 7$** !

$$3 \cdot \log_2 x = 7 \qquad |:3$$

$$\log_2 x = \frac{7}{3}$$

$$x = 2^{\frac{7}{3}}$$

$$x = \sqrt[3]{2^7}$$

$$x = \sqrt[3]{128}$$

12.) Ermitteln Sie x für **$5 \cdot \log_2 x = 6$** !

$$5 \cdot \log_2 x = 6 \qquad |:5$$

$$\log_2 x = \frac{6}{5}$$

$$x = 2^{\frac{6}{5}}$$

$$x = \sqrt[5]{2^6}$$

$$x = 2 \cdot \sqrt[5]{2}$$