Der Logarithmus

Zu jeder positiven Zahl b und zu jeder positiven Zahl a ≠ 1 gibt es genau eine reelle Zahl c, für die gilt:

$\mathbf{a = \sqrt[c]{b}}$	$\mathbf{b = a^c}$	$\mathbf{c = \log_a b}$

a ... Wurzelwert, Basis
b ... Radikant, Numerus
c ... (Wurzel-)Exponent

gelesen: „Logarithmus von b zur Basis a“

Für Logarithmen mit der Basis 2 wird **lb** (von „binär“) geschrieben.

Für Logarithmen mit der Basis 10 („dekadischer Logarithmus“) wird **lg** geschrieben.

Für Logarithmen mit der Basis e („natürlicher Logarithmus, e = 2,7182818...) wird **ln** geschrieben.

In der Mathematik besitzen der dekadische und der natürliche Logarithmus besondere Bedeutung.

Die Basis e wird beschrieben durch den Grenzwert $$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und durch die unendliche Reihe $$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Logarithmengesetze

1. Logarithmengesetz: Der Logarithmus eines Produktes ist gleich der Summe der Logarithmen der Faktoren.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

2. Logarithmengesetz: Der Logarithmus eines Quotienten ist gleich der Differenz aus den Logarithmen des Dividenden und des Divisors.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Beispiel:

$$\log_3 \frac{1}{7} = \log_3 1 - \log_3 7$$
$$= 0 - \log_3 7$$
$$= -\log_3 7$$

3. Logarithmengesetz: Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem mit dem Potenzexponenten multiplizierten Logarithmus der Potenzbasis.

$$\log_a (b^c) = c \cdot \log_a b$$

Beispiel:

$$\log_a \frac{7^3 x^2}{8^3} = 3 \cdot \log_a 7 + 2 \cdot \log_a x - 3 \cdot \log_a 8$$

Beispiel:

$$\log_a a^b = b \cdot \log_a a$$
$$= b \cdot 1$$
$$= b$$

4. Logarithmengesetz: Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem durch den Wurzelexponenten geteilten Logarithmus des Radikanten.

$$\log_a \quad = \frac{1}{b} \cdot \log_a c$$

Rechenoperationen der reellen Arithmetik

Stufe	Operation	Gesetz	Gleichung
1	Addition	Kommutativgesetz	$a + b = b + a$
		Assoziativgesetz	$(a + b) + c = a + (b + c)$
	Subtraktion	Umkehrung	$b - a = b + (-a) = -a + b$
2	Multiplikation	Kommutativgesetz	$a \cdot b = b \cdot a$
		Assoziativgesetz	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
		Distributivgesetz	$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$
	Division	Umkehrung	$\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a} = b \cdot a^{-1}$
		Distributivgesetz	$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$
3	Potenzieren	Distributivgesetz	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
			$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
	Radizieren	Distributivgesetz	
		Umkehrung	
	Exponieren		$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
			$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
			$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
	Logarithmieren	Distributivgesetz	$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
			$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
			$\log_a(b^n) = n \cdot \log_a b$

1.) Formulieren Sie im ersten Lösungskästchen jeweils die ausführliche Schreibweise für den Logarithmus-Ausdruck (z. B. $\mathbf{log_2}$ für **lb** usw.)!
Tragen Sie die Ergebnisse der Aufgaben jeweils in das zweite Lösungskästchen ein!

a)	lg 100	=	$\log_{10} 100$	=	2
b)	lb 4	=	$\log_2 4$	=	2
c)	lb 8	=	$\log_2 8$	=	3
d)	lg 0,1	=	$\log_{10} 0{,}1$	=	- 1
e)	lb 2	=	$\log_2 2$	=	1
f)	lg 10	=	$\log_{10} 10$	=	1
g)	$\log_a a$	=	$\log_a a$	=	1

h)	lb 0,5	=	$\log_2 0{,}5$	=	- 1
i)	lg 0,001	=	$\log_{10} 0{,}001$	=	- 3
j)	lb 0,25	=	$\log_2 0{,}25$	=	- 2
k)	lb 1	=	$\log_2 1$	=	0
l)	lg 1	=	$\log_{10} 1$	=	0
m)	ln 1	=	$\log_e 1$	=	0
n)	$\log_a 1$	=	$\log_a 1$	=	0

2.) Lösen Sie **lb 32 = ?** mit Hilfe des 1. Logarithmengesetzes!

$\mathrm{lb}\ 32 = \log_2 32 = 5$ oder

$$\begin{aligned} \mathrm{lb}\ 32 &= \mathrm{lb}\ (4 \bullet 8) \\ &= \mathrm{lb}\ 4 + \mathrm{lb}\ 8 \\ &= \log_2 4 + \log_2 8 \\ &= 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

3.) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\mathbf{\log_a \frac{1}{19}}$!

$$\begin{aligned} \log_a \frac{1}{19} &= \log_a 1 - \log_a 19 \\ &= 0 - \log_a 19 \\ &= - \log_a 19 \end{aligned}$$

4.) Ermitteln Sie den Wert für **lg 23,7** !

$$\begin{aligned} \lg 23{,}7 = \log_{10} 23{,}7 &= \log_{10} (2{,}37 \bullet 10) \\ &= \log_{10} 2{,}37 + \log_{10} 10 \\ &= 0{,}3747 \text{ (s. Tabelle)} + 1 \\ &= 1{,}3747 \end{aligned}$$

5.) **Ermitteln Sie den Wert für lg 0,0237 !**

$$\begin{aligned} \lg 0{,}0237 = \log_{10} 0{,}0237 &= \log_{10}(2{,}37 \bullet 10^{-2}) \\ &= \log_{10} 2{,}37 + \log_{10} 10^{-2} \\ &= 0{,}3747 \text{ (s. Tabelle)} + -2 \\ &= -1{,}6253 \end{aligned}$$

6.) **Ermitteln Sie den Wert für lg 4247 !**

$$\begin{aligned} \lg 4247 = \log_{10} 4247 &= \log_{10}(4{,}247 \bullet 10^{3}) \\ &= \log_{10} 4{,}247 + \log_{10} 10^{3} \\ &= 0{,}6281 + 3 \\ & \quad \text{(Interpolieren auf } \tfrac{7}{10}\text{)} \\ &= 3{,}6281 \end{aligned}$$

s. Tabelle: $\log_{10} 4{,}24 = 0{,}6274$
$\log_{10} 4{,}25 = 0{,}6284$