

Zahlensysteme

© Bommhardt. Das Vervielfältigen dieses Arbeitsmaterials zu nichtkommerziellen Zwecken ist gestattet.

www.bommi2000.de

1 Einführung

Ziffer: Schriftzeichen zum Darstellen von Zahlen

Zahl:

- Mengenangabe
- Darstellung in Ziffern (4.711) oder Worten („hundert“)

Additionssystem: stellenwertloses Zahlensystem

→ Römisches Zahlensystem war bis ins 16. Jahrhundert in Europa in Gebrauch

Regeln:

- 1.) Alle Symbole stehen in der Reihenfolge ihrer Werte, erst die höherwertigen, dann die niedrigeren.
- 2.) Die Hauptsymbole I, X, C und M dürfen maximal dreimal hintereinander stehen.
- 3.) Die Nebensymbole V, L und D dürfen nur einmal verwendet werden und nicht vor einem höherwertigen Symbol stehen.
- 4.) Vor einem Symbol steht höchstens das nächstkleinere Hauptsymbol.

Beispiele:

49 = XLIX	nicht: IL
99 = XCIX	nicht: IC , LIL
495 = CDXCV	nicht: VD , XDV , CDLXLV
999 = CMXCIX	nicht: IM , XMIX , DCDLXLIX
1997 = MCMXCVII	

Nachteile:

- lange und unübersichtliche Zahlen
- keine Null
- schwierig bei Rechenoperationen
z. B.: XCIX • XLIX (statt: 99 • 49)



Eröffnet 31. Oktober 1735



Anno 1685

Positionssystem: (auch: Stellenwertsystem)

- von Bedeutung ist die jeweilige Position der Ziffern innerhalb der Zahl
- z. B.: $4711_{10} = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$
 $= 4.000 + 700 + 10 + 1$
- Das Sexagesimalsystem (Basis 60) verwendeten ca. 3000 bis 1800 v. u. Z. die Babylonier, Sumerer und Mesopotamier.
 → Zeiteinteilung, Kreiseinteilung
- Das Vigesimalssystem (Basis 20) verwendeten die Kelten in England und Frankreich, die Basken in Nordspanien, die Azteken und die Mayas in Südamerika.
 → bis in die 1970er Jahre war ein engl. Pfund = 20 Schillinge
- Das Dezimalsystem (lat. „decem“ = dt. „zehn“) basiert auf der Grundzahl 10. Im Dezimalsystem gelten die Ziffern 0, 1, 2, ... 9. Die Stellenwerte einer Dezimalzahl verlaufen von rechts nach links wie folgt: 1, 10, 100, 1.000 usw.

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \text{Exponent: 2} \\
 \boxed{10^2 = 100} \leftarrow \text{Potenzwert: 100} \\
 \uparrow \text{Basis: 10}
 \end{array}$$

2 Das Umrechnen von Zahlen aus unterschiedlichen Zahlensystemen

1.) Welchen Dezimalwerten entsprechen die Zahlen 4.711_7 / 4.711_8 / 4.711_9 ?

a) Nicht lösbar, da die Ziffer 7 im 7-er-Zahlensystem nicht existiert!

$$\begin{aligned} \text{b) } 4.711_8 &= 4 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 \\ &= 4 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 8 + 1 \\ &= 2.048 + 448 + 8 + 1 = \mathbf{2.505_{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4.711_9 &= 4 \cdot 9^3 + 7 \cdot 9^2 + 1 \cdot 9^1 + 1 \cdot 9^0 \\ &= 4 \cdot 729 + 7 \cdot 81 + 9 + 1 \\ &= 2.916 + 567 + 9 + 1 = \mathbf{3.493_{10}} \end{aligned}$$

2.) Welchen Dezimalwerten entsprechen die Zahlen 2.004_5 / 2.004_6 / 2.004_7 / 2.004_8 / 2.004_9 ?

$$\begin{aligned} \text{a) } 2.004_5 &= 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 \\ &= 2 \cdot 125 + 4 \cdot 1 \\ &= 250 + 4 = \mathbf{254_{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2.004_6 &= 2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 \\ &= 2 \cdot 216 + 4 \cdot 1 \\ &= 432 + 4 = \mathbf{436_{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2.004_7 &= 2 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 \\ &= 2 \cdot 343 + 4 \cdot 1 \\ &= 686 + 4 = \mathbf{690_{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2.004_8 &= 2 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\ &= 2 \cdot 512 + 4 \cdot 1 \\ &= 1.024 + 4 = \mathbf{1.028_{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 2.004_9 &= 2 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^2 + 0 \cdot 9^1 + 4 \cdot 9^0 \\ &= 2 \cdot 729 + 4 \cdot 1 \\ &= 1.458 + 4 = \mathbf{1.462_{10}} \end{aligned}$$

3.)

Welchen Dezimalwerten entsprechen 1.443_5 / 1.443_7 / 1.443_9 / 1.443_{11} / 1.443_{13} ?

a) $1.443_5 = 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0$
 $= 125 + 100 + 20 + 3 = 248_{10}$

b) $1.443_7 = 1 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0$
 $= 343 + 196 + 28 + 3 = 570_{10}$

c) $1.443_9 = 1 \cdot 9^3 + 4 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9^1 + 3 \cdot 9^0$
 $= 729 + 324 + 36 + 3 = 1.092_{10}$

d) $1.443_{11} = 1 \cdot 11^3 + 4 \cdot 11^2 + 4 \cdot 11^1 + 3 \cdot 11^0$
 $= 1.331 + 484 + 44 + 3 = 1.862_{10}$

e) $1.443_{13} = 1 \cdot 13^3 + 4 \cdot 13^2 + 4 \cdot 13^1 + 3 \cdot 13^0$
 $= 2.197 + 676 + 52 + 3 = 2.928_{10}$

4.)

Stellen Sie die Dezimalzahl 4.711_{10} im 7-er-, im 8-er- und im 9-er-Zahlensystem dar!

a) $4.711 : 7 = 673$ Rest:

0

 $673 : 7 = 96$ Rest:

1

 $96 : 7 = 13$ Rest:

5

 $13 : 7 = 1$ Rest:

6

 $1 : 7 = 0$ Rest:

1

 $\rightarrow 16.510_7$

b) $4.711 : 8 = 588$ Rest:

7

 $588 : 8 = 73$ Rest:

4

 $73 : 8 = 9$ Rest:

1

 $9 : 8 = 1$ Rest:

1

 $1 : 8 = 0$ Rest:

1

 $\rightarrow 11.147_8$

c) $4.711 : 9 = 523$ Rest:

4

 $523 : 9 = 58$ Rest:

1

 $58 : 9 = 6$ Rest:

4

 $6 : 9 = 0$ Rest:

6

 $\rightarrow 6.414_9$

5.)

Stellen Sie die Dezimalzahl 2.004_{10} im 5er-, 6er-, 7er-, 8er- und 9er-Zahlensystem dar!

a)	$2.004 : 5 = 400$ $400 : 5 = 80$ $80 : 5 = 16$ $16 : 5 = 3$ $3 : 5 = 0$	Rest: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>4</td></tr><tr><td>0</td></tr><tr><td>0</td></tr><tr><td>1</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	4	0	0	1	3		→	31.004_5
4										
0										
0										
1										
3										
b)	$2.004 : 6 = 334$ $334 : 6 = 55$ $55 : 6 = 9$ $9 : 6 = 1$ $1 : 6 = 0$	Rest: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>0</td></tr><tr><td>4</td></tr><tr><td>1</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	0	4	1	3	1		→	13.140_6
0										
4										
1										
3										
1										
c)	$2.004 : 7 = 286$ $286 : 7 = 40$ $40 : 7 = 5$ $5 : 7 = 0$	Rest: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>2</td></tr><tr><td>6</td></tr><tr><td>5</td></tr><tr><td>5</td></tr></table>	2	6	5	5		→	5.562_7	
2										
6										
5										
5										
d)	$2.004 : 8 = 250$ $250 : 8 = 31$ $31 : 8 = 3$ $3 : 8 = 0$	Rest: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>4</td></tr><tr><td>2</td></tr><tr><td>7</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	4	2	7	3		→	3.724_8	
4										
2										
7										
3										
e)	$2.004 : 9 = 222$ $222 : 9 = 24$ $24 : 9 = 2$ $2 : 9 = 0$	Rest: <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>6</td></tr><tr><td>6</td></tr><tr><td>6</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	6	6	6	2		→	2.666_9	
6										
6										
6										
2										

6.)

Stellen Sie die Dezimalzahl 1.443_{10} im 5er-, 7er-, 9er-, 11er- und 13er-Zahlensystem dar!

a) $1.443 : 5 = 288$ Rest:

3

 $288 : 5 = 57$ Rest:

3

 $57 : 5 = 11$ Rest:

2

 $11 : 5 = 2$ Rest:

1

 $2 : 5 = 0$ Rest:

2

 → **21.233_5**

b) $1.443 : 7 = 206$ Rest:

1

 $206 : 7 = 29$ Rest:

3

 $29 : 7 = 4$ Rest:

1

 $4 : 7 = 0$ Rest:

4

 → **4.131_7**

c) $1.443 : 9 = 160$ Rest:

3

 $160 : 9 = 17$ Rest:

7

 $1 : 9 = 1$ Rest:

8

 $1 : 9 = 0$ Rest:

1

 → **1.873_9**

d) $1.443 : 11 = 131$ Rest:

2

 $131 : 11 = 11$ Rest:

10

 $11 : 11 = 1$ Rest:

0

 $1 : 11 = 0$ Rest:

1

 → **$1.0A2_{11}$**
 10 = A

e) $1.443 : 13 = 111$ Rest:

0

 $111 : 13 = 8$ Rest:

7

 $8 : 13 = 0$ Rest:

8

 → **870_{13}**

7.)

Vervollständigen Sie folgende Tabelle!

	5-er	6-er	7-er	9-er	10-er	11-er	12-er	13-er
123_5	123	102	53	42	38	35	32	2C
123_6	201	123	102	56	51	47	43	3C
123_7	231	150	123	73	66	60	56	51
123_9	402	250	204	123	102	93	86	7B
123_{10}	443	323	234	146	123	102	A3	96
123_{11}	1.041	402	266	172	146	123	102	B3
123_{12}	1.141	443	333	210	171	146	123	102
123_{13}	1.243	530	402	240	198	170	146	123

3 Das Rechnen im Dualsystem

3.1 Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Dualzahlen

Das Dualsystem (auch: Binärsystem) ist ein Stellenwertsystem, das auf der Grundzahl 2 basiert. Im Dualsystem gelten die Ziffern 0 und 1. Die Stellenwerte einer Dualzahl verlaufen von rechts nach links wie folgt: 1, 2, 4, 8, 16, 32 usw.

z. B.: Welcher Dualzahl entspricht der Dezimalwert $53,34375_{10}$?

53 : 2 =	26	Rest:	1	↑	→
26 : 2 =	13	Rest:	0		
13 : 2 =	6	Rest:	1		
6 : 2 =	3	Rest:	0		
3 : 2 =	1	Rest:	1		
1 : 2 =	0	Rest:	1		

110101₂

0,34375	• 2 =	0	,6875	↓	←
0,6875	• 2 =	1	,375		
0,375	• 2 =	0	,75		
0,75	• 2 =	1	,5		
0,5	• 2 =	1	,0		

0,01011₂

8.) Welcher Dualzahl entspricht der Dezimalwert $23,9375_{10}$?

23 : 2 =	11	Rest:	1	↑	→
11 : 2 =	5	Rest:	1		
5 : 2 =	2	Rest:	1		
2 : 2 =	1	Rest:	0		
1 : 2 =	0	Rest:	1		

10111,1111₂

0,9375	• 2 =	1	,875	↓	←
0,875	• 2 =	1	,75		
0,75	• 2 =	1	,5		
0,5	• 2 =	1	,0		

9.) Welcher Dualzahl entspricht der Dezimalwert $17,78125_{10}$?

17 : 2 =	8	Rest:	1	↑	→
8 : 2 =	4	Rest:	0		
4 : 2 =	2	Rest:	0		
2 : 2 =	1	Rest:	0		
1 : 2 =	0	Rest:	1		

10001,11001₂

0,78125	• 2 =	1	,5625	↓	←
0,5625	• 2 =	1	,25		
0,25	• 2 =	0	,25		
0,25	• 2 =	0	,5		
0,5	• 2 =	1	,0		

3.2 Das Umrechnen von Dualzahlen in Dezimalzahlen

z. B.: $101011,11_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$
 $= 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
 $= \mathbf{43,75_{10}}$

10.) Welchem Dezimalwert entspricht die Dualzahl $11011,101_2$?

$$\begin{aligned} 11011,101_2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\ &= 16 + 8 + 0 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{8} \\ &= \mathbf{27,625_{10}} \end{aligned}$$

11.) Welchem Dezimalwert entspricht die Dualzahl $10011,1001_2$?

$$\begin{aligned} 10011,1001_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \\ &= 16 + 0 + 0 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + 0 + 0 + \frac{1}{16} \\ &= \mathbf{19,5625_{10}} \end{aligned}$$

3.3 Das Grundrechnen mit Dualzahlen

$$\begin{array}{r}
 \text{z. B.:} \quad 1\ 0\ 1\ 1,0\ 1 \quad 11,25 \\
 + 1\ 1\ 0\ 0,1\ 1 \quad + 12,75 \\
 \hline
 1\ 1\ 0\ 0\ 0,0\ 0 \quad 24,00
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0,0\ 1 \quad 38,25 \\
 - 1\ 0\ 0\ 1\ 1,1\ 1 \quad - 19,75 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 1\ 0,1\ 0 \quad 18,50
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{z. B.:} \quad 1011,101 \cdot 11,1 \quad 11,625 \cdot 3,5 \\
 1011101 \quad 34875 \\
 1011101 \quad 58125 \\
 1011101 \quad 40,6875 \\
 \hline
 101000,1011
 \end{array}$$

12.) Addieren Sie im Dualsystem!

$$\begin{array}{r}
 \text{a)} \quad 1\ 1\ 0\ 1,1\ 1 \quad 13,75 \\
 + 1\ 1\ 0,1\ 0 \quad + 6,50 \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 0\ 0,0\ 1 \quad 20,25
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b)} \quad 1\ 1\ 1\ 0\ 1,0\ 0 \quad 29,00 \\
 + 1\ 0\ 0\ 1,0\ 1 \quad + 9,25 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0,0\ 1 \quad 38,25
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{c)} \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1,1\ 1 \quad 61,75 \\
 + 1\ 1\ 0\ 1\ 1,0\ 1 \quad + 27,25 \\
 \hline
 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1,0\ 0 \quad 89,00
 \end{array}$$

13.) Subtrahieren Sie im Dualsystem!

$$\begin{array}{r}
 \text{a)} \quad 1\ 1\ 0\ 1,1\ 1 \quad 13,75 \\
 - 1\ 1\ 0,1\ 0 \quad - 6,50 \\
 \hline
 1\ 1\ 1,0\ 1 \quad 7,25
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{b)} \quad 1\ 1\ 1\ 0\ 1,0\ 0 \quad 29,00 \\
 - 1\ 0\ 0\ 1,0\ 1 \quad - 9,25 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 1\ 1,1\ 1 \quad 19,75
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{c)} \quad 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1,1\ 1 \quad 61,75 \\
 - 1\ 1\ 0\ 1\ 1,0\ 1 \quad - 27,25 \\
 \hline
 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0,1\ 0 \quad 34,50
 \end{array}$$

4 Das Rechnen im Hexadezimalsystem

4.1 Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Hexadezimalzahlen

Das Hexadezimalsystem ist ein Stellenwertsystem, das auf der Grundzahl 16 basiert. Im Dualsystem gelten die Ziffern 0, 1, 2, ... 9, A, B, C, D, E und F. Die Stellenwerte einer Hexadezimalzahl verlaufen von rechts nach links wie folgt: 1, 16, 256, 4.096 usw.

Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Hexadezimalzahlen erfolgt über den Zwischenschritt Dualsystem. Die dabei ermittelte Dualzahl wird in Viererblöcken (Tetraden) zusammengefasst.

z. B.: $147_{10} = 144 + 3$
 $= 9 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = \mathbf{93}_{16}$

oder: $128 + 16 + 2 + 1 =$
 $2^7 + 2^4 + 2^1 + 2^0 = \mathbf{1001\ 0011} = \mathbf{93}_{16}$

oder: $147 : 16 = 9 \text{ Rest: } \mathbf{3}$
 $9 : 16 = \mathbf{0} \text{ Rest: } \mathbf{9} \uparrow \rightarrow \mathbf{93}_{16}$

z. B.: $0,34375 \cdot 16 = \mathbf{5},5$ \downarrow
 $0,5 \cdot 16 = \mathbf{8},0$ $\rightarrow \mathbf{0,58}_{16}$

14.) Stellen Sie die Dezimalzahl $112,375_{10}$ als Hexadezimalzahl dar!

$$112,375_{10} = 112 + 0 + 0,375$$
$$= 7 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 + 6 \cdot 16^{-1} = \mathbf{70,6}_{16}$$

oder: $64 + 32 + 16 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$
 $2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^{-2} + 2^{-3} = \mathbf{0111\ 0000}, \mathbf{0110} = \mathbf{70,6}_{16}$

oder: $112 : 16 = 7 \text{ Rest: } \mathbf{0}$ \uparrow
 $7 : 16 = \mathbf{0} \text{ Rest: } \mathbf{7} \rightarrow \mathbf{70,6}_{16}$ \leftarrow $0,375 \cdot 16 = \mathbf{6},0$ \downarrow



15.)



Stellen Sie die Dezimalzahl $193,625_{10}$ als Hexadezimalzahl dar!

$$\begin{aligned} 193,625_{10} &= 192 + 1 + \frac{10}{16} \\ &= 12 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 + 10 \cdot 16^{-1} = \mathbf{C1,A_{16}} \end{aligned}$$

oder: $128 + 64 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$$2^7 + 2^6 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} = \boxed{1100} \boxed{0001}, \boxed{1010} = \mathbf{C1,A_{16}}$$

oder: $193 : 16 = 12 \text{ Rest: } \boxed{1}$  $0,625 \cdot 16 = \boxed{10}, \mathbf{0}$ 

$12 : 16 = \mathbf{0} \text{ Rest: } \boxed{12}$  $\mathbf{C1,A}$ 

4.2 Das Umrechnen von Hexadezimalzahlen in Dezimalzahlen

Das Umrechnen von Zahlen aus dem Hexadezimalsystem in das Dezimalsystem erfolgt ebenfalls über den Zwischenschritt Dualsystem. D. h., jeweils eine Dualtetrade entspricht einer Hexadezimalziffer.

$$\begin{array}{r} \text{z. B.: } 1A7_{16} = \quad 1 \quad \quad A \quad \quad 7 \\ \quad \quad \quad 1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 \\ \quad \quad \quad 256 + 160 + 7 = \quad \mathbf{423}_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{oder:} \quad \quad \quad 1 \quad \quad A \quad \quad 7 \\ \quad \quad \quad \boxed{0001} \quad \boxed{1010} \quad \boxed{0111} \\ \quad \quad \quad 2^8 + \quad 2^7+2^5 + \quad 2^2+2^1+2^0 \\ \quad \quad \quad 256 \quad 128+32 \quad 4+2+1 = \quad \mathbf{423}_{10} \end{array}$$

16.) Welchem Dezimalwert entspricht die Hexadezimalzahl $2CB_{16}$?

$$\begin{array}{r} 2CB_{16} = \quad 2 \quad \quad C \quad \quad B \\ \quad \quad \quad 2 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0 \\ \quad \quad \quad 512 + 192 + 11 = \quad \mathbf{715}_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{oder:} \quad \quad \quad 2 \quad \quad C \quad \quad B \\ \quad \quad \quad \boxed{0010} \quad \boxed{1100} \quad \boxed{1011} \\ \quad \quad \quad 2^9 + \quad 2^7+2^6 + \quad 2^3+2^1+2^0 \\ \quad \quad \quad 512 + \quad 128+64 \quad + 8+2+1 = \quad \mathbf{715}_{10} \end{array}$$

17.) Welchem Dezimalwert entspricht die Hexadezimalzahl 0815_{16} ?

$$\begin{array}{r} 815_{16} = \quad 8 \quad \quad 1 \quad \quad 5 \\ \quad \quad \quad 8 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 \\ \quad \quad \quad 2.048 + 16 + 5 = \quad \mathbf{2.069}_{10} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{oder:} \quad \quad \quad 8 \quad \quad 1 \quad \quad 5 \\ \quad \quad \quad \boxed{1000} \quad \boxed{0001} \quad \boxed{0101} \\ \quad \quad \quad 2^{11} \quad 2^5 \quad 2^2+2^0 \\ \quad \quad \quad 2.048 \quad + 16 \quad + 4 + 1 = \quad \mathbf{2.069}_{10} \end{array}$$

4.3 Das Grundrechnen mit Hexadezimalzahlen

z. B.:

$$\begin{array}{r} 3F8,8 \\ + 769,9 \\ \hline \mathbf{B62,1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1.016,5000 \\ + 1.897,5625 \\ \hline 2.914,0625 \end{array}$$

z. B.:

$$\begin{array}{r} 769,9 \\ - 3F8,8 \\ \hline \mathbf{371,1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1.897,5625 \\ - 1.016,5000 \\ \hline 881,0625 \end{array}$$

18.) Addieren Sie im Hexadezimalsystem!

a)

$$\begin{array}{r} 6AB,5 \\ + 3CE,A \\ \hline \mathbf{A79, F} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1.707,3125 \\ + 974,6250 \\ \hline 2.681,9375 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 9DE,6 \\ + 4A1,1 \\ \hline \mathbf{E7F,7} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.526,3750 \\ + 1.185,0625 \\ \hline 3.711,4375 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 83C,1 \\ + B4,A \\ \hline \mathbf{8F0,B} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.108,0625 \\ + 180,6250 \\ \hline 2.288,6875 \end{array}$$

19.) Subtrahieren Sie im Hexadezimalsystem!

a)

$$\begin{array}{r} 6AB,5 \\ - 3CE,A \\ \hline \mathbf{2DC,B} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1.707,3125 \\ - 974,6250 \\ \hline 732,6875 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 9DE,6 \\ - 4A1,1 \\ \hline \mathbf{53D,5} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.526,3750 \\ - 1.185,0625 \\ \hline 1.341,3125 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 83C,1 \\ - B4,A \\ \hline \mathbf{787,7} \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.108,0625 \\ - 180,6250 \\ \hline 1.927,4375 \end{array}$$

5 Das Rechnen im Oktalsystem

5.1 Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Oktalzahlen

Das Oktalsystem ist ein Stellenwertsystem, das auf der Grundzahl 8 basiert. Im Oktalsystem gelten die Ziffern 0, 1, 2, ... 7. Die Stellenwerte einer Oktalzahl verlaufen von rechts nach links wie folgt: 1, 8, 64, 512, 4.096 usw.

Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Oktalzahlen erfolgt über den Zwischenschritt Dualsystem. Die dabei ermittelte Dualzahl wird in Dreierblöcken (Triaden) zusammengefasst.

$$\text{z. B.: } 147_{10} = 128 + 16 + 3 = 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = \mathbf{223_8}$$

oder:

2	2	3
010	010	111

$$2^7 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 128 + 16 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{147_{10}}$$

oder:

$147 : 8 = 18$	Rest:	3		→
$18 : 8 = 2$	Rest:	2		
$2 : 8 = 0$	Rest:	2		

223₈

z. B.: $0,34375 \cdot 8 = \frac{2}{8} = 0,25$ \downarrow

$0,75 \cdot 8 = \frac{6}{8} = 0,75$ \rightarrow **0,26₈**

20.)

Stellen Sie den Dezimalwert $92,25_{10}$ als Oktalzahl dar!

$$\begin{aligned}
 92,25_{10} &= 64 + 24 + 4 + \frac{1}{4} \\
 &= 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} = \mathbf{134,2_8}
 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
 &64 + 24 + 4 + \frac{1}{4} \\
 &1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} \\
 &\boxed{001} \boxed{011} \boxed{100} , \boxed{010} = \mathbf{134,2_8}
 \end{aligned}$$

oder:

$92 : 8 = 11$	Rest:	4	↑	→	$\mathbf{134,2_8}$	←
$11 : 8 = 1$	Rest:	3				
$1 : 8 = 0$	Rest:	1				

$0,25 \cdot 8 =$	2	,	0	↓
------------------	---	---	---	---

21.)

Stellen Sie den Dezimalwert $87,75_{10}$ als Oktalzahl dar!

$$\begin{aligned}
 87,75_{10} &= 64 + 16 + 7 + \frac{3}{4} \\
 &= 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1} = \mathbf{127,6_8}
 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
 &64 + 16 + 7 + \frac{3}{4} \\
 &1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1} \\
 &\boxed{001} \boxed{010} \boxed{111} , \boxed{110} = \mathbf{127,6_8}
 \end{aligned}$$

oder:

$87 : 8 = 10$	Rest:	7	↑	→	$\mathbf{127,6_8}$	←
$10 : 8 = 1$	Rest:	2				
$1 : 8 = 0$	Rest:	1				

$0,75 \cdot 8 =$	6	,	0	↓
------------------	---	---	---	---

5.2 Das Umrechnen von Oktalzahlen in Dezimalzahlen

Das Umrechnen von Zahlen aus dem Oktalsystem in das Dezimalsystem erfolgt ebenfalls über den Zwischenschritt Dualsystem. D. h., jeweils eine Dualtriade entspricht einer Oktalziffer.

$$\begin{aligned} \text{z. B.: } 147_8 &= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 \\ &= 64 + 32 + 7 = \mathbf{103_{10}} \end{aligned}$$

oder:

1	4	7		
001	100	111		
$1 \cdot 8^2 +$	$4 \cdot 8^1 +$	$7 \cdot 8^0$		
64 +	32 +	7	=	$\mathbf{103_{10}}$

22.) Welchem Dezimalwert entspricht die Oktalzahl 4.711_8 ?

$$\begin{aligned} 4711_8 &= 4 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 \\ &= 4 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 1 + 1 \\ &= 2.048 + 448 + 8 + 1 = \mathbf{2.505_{10}} \end{aligned}$$

oder:

4	7	1	1		
100	111	001	001		
$2^{11} +$	$2^8 + 2^7 + 2^6 +$	$2^3 +$	2^0		
2.048 +	256+128+64	+ 8 +	1	=	$\mathbf{2.505_{10}}$

23.) Welchem Dezimalwert entspricht die Oktalzahl $237,2_8$?

$$\begin{aligned} 237,2_8 &= 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} \\ &= 2 \cdot 64 + 3 \cdot 8 + 7 \cdot 1 + \frac{2}{8} \\ &= 128 + 24 + 7 + \frac{1}{4} = \mathbf{159,25_{10}} \end{aligned}$$

oder:

2	3	7	,	2		
010	011	111	,	010		
$2^7 +$	$2^4 + 2^3 +$	$2^2 + 2^1 + 2^0 +$		2^0		
128 +	16 + 8 +	4 + 2 + 1 +		$\frac{1}{4}$	=	$\mathbf{159,25_{10}}$

5.3 Das Grundrechnen mit Oktalzahlen

z. B.:

$\begin{array}{r} 645,5_8 \\ + 372,7_8 \\ \hline 1240,4_8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 421,625_{10} \\ + 250,875_{10} \\ \hline 672,500_{10} \end{array}$	<u>z. B.:</u>	$\begin{array}{r} 645,5_8 \\ - 372,7_8 \\ \hline 252,6_8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 421,625_{10} \\ - 250,875_{10} \\ \hline 170,750_{10} \end{array}$
--	--	---------------	---	--

24.) Addieren Sie im Oktalsystem!

a)	$\begin{array}{r} 365,3_8 \\ + 256,4_8 \\ \hline 643,7_8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 245,375_{10} \\ + 174,500_{10} \\ \hline 419,875_{10} \end{array}$	b)	$\begin{array}{r} 623,1_8 \\ + 234,6_8 \\ \hline 1057,7_8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 403,125_{10} \\ + 156,750_{10} \\ \hline 559,875_{10} \end{array}$
c)	$\begin{array}{r} 453,2_8 \\ + 375,6_8 \\ \hline 1051,0_8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 299,250_{10} \\ + 253,750_{10} \\ \hline 553,000_{10} \end{array}$	d)	$\begin{array}{r} 135,1_8 \\ + 132,7_8 \\ \hline 270,0_8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 93,125_{10} \\ + 90,875_{10} \\ \hline 184,000_{10} \end{array}$

25.) Subtrahieren Sie im Oktalsystem!

a)	$\begin{array}{r} 365,3_8 \\ - 256,4_8 \\ \hline 106,7_8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 245,375_{10} \\ - 174,500_{10} \\ \hline 70,875_{10} \end{array}$	b)	$\begin{array}{r} 623,1_8 \\ - 234,6_8 \\ \hline 366,3_8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 403,125_{10} \\ - 156,750_{10} \\ \hline 246,375_{10} \end{array}$
c)	$\begin{array}{r} 453,2_8 \\ - 375,6_8 \\ \hline 55,4_8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 299,250_{10} \\ - 253,750_{10} \\ \hline 45,500_{10} \end{array}$	d)	$\begin{array}{r} 135,1_8 \\ - 132,7_8 \\ \hline 2,2_8 \end{array}$	$\begin{array}{r} 93,125_{10} \\ - 90,875_{10} \\ \hline 2,250_{10} \end{array}$

6 Das Rechnen im Quartalsystem

6.1 Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Quartalzahlen

Das Quartalsystem ist ein Stellenwertsystem, das auf der Grundzahl 4 basiert. Im Quartalsystem gelten die Ziffern 0, 1, 2 und 3. Die Stellenwerte einer Quartalzahl verlaufen von rechts nach links wie folgt: 1, 4, 16, 64, 256 usw.

Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Quartalzahlen erfolgt über den Zwischenschritt Dualsystem. Die dabei ermittelte Dualzahl wird in Zweierblöcken zusammengefasst.

z. B.: $147_{10} = 128 + 16 + 0 + 3 = 2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 2103_4$

oder:

2	1	0	3
10	01	00	11
2^7	2^4	0	2^1+2^0
128 +	16 +		2 + 1

$= 147_{10}$

oder:

$147 : 4 = 36$	Rest:	3		→	2103_4
$36 : 4 = 9$	Rest:	0			
$9 : 4 = 2$	Rest:	1			
$2 : 4 = 0$	Rest:	2			

z. B.:

$0,34375 \cdot 4 =$	1	,375		→	$0,112_4$
$0,375 \cdot 4 =$	1	,5			
$0,5 \cdot 4 =$	2	,0			

26.)

Stellen Sie den Dezimalwert $42\frac{1}{2}_{10}$ als Quartalzahl dar!

$$42,5_{10} = 32 + 8 + 2 + \frac{1}{2}$$

$$= 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1} = \mathbf{222,2_4}$$

oder:

$$32 + 8 + 2 + \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^{-1}$$

10	10	10	,	10	=	222,2₄
----	----	----	---	----	---	--------------------------

oder:

$42 : 4 = 10$	Rest:	2	↑	$0,5 \cdot 4 =$	2	,	0	↓			
$10 : 4 = 2$	Rest:	2		$2 : 4 =$	0	Rest:	2		→	222,2₄	←
$2 : 4 =$	0	Rest:		2							

27.)

Stellen Sie den Dezimalwert $36\frac{3}{4}_{10}$ als Quartalzahl dar!

$$36,75_{10} = 32 + 4 + 0 + \frac{3}{4}$$

$$= 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^{-1} = \mathbf{210,3_4}$$

oder:

$$32 + 4 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$2 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

10	01	00	,	11	=	210,3₄
----	----	----	---	----	---	--------------------------

oder:

$36 : 4 = 9$	Rest:	0	↑	$0,75 \cdot 4 =$	3	,	0	↓			
$9 : 4 = 2$	Rest:	1		$2 : 4 =$	0	Rest:	2		→	210,3₄	←
$2 : 4 =$	0	Rest:		2							

6.2 Das Umrechnen von Quartalzahlen in Dezimalzahlen

Das Umrechnen von Zahlen aus dem Quartalsystem in das Dezimalsystem erfolgt ebenfalls über den Zwischenschritt Dualsystem.

$$\begin{aligned} \text{z. B.: } 132_4 &= 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 \\ &= 16 + 12 + 2 = \mathbf{30_{10}} \end{aligned}$$

oder:

1	3	2
01	11	10

$$\begin{aligned} &1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 \\ &16 + 12 + 1 = \mathbf{30_{10}} \end{aligned}$$

28.) Welchem Dezimalwert entspricht die Quartalzahl 21,33₄ ?

$$\begin{aligned} 21,33_4 &= 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^{-1} + 3 \cdot 4^{-2} \\ &= 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{16} \\ &= 8 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \mathbf{9,9375_{10}} \end{aligned}$$

oder:

2	1	3	3
10	01	,	11 11

$$\begin{aligned} &2^3 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} \\ &8 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \mathbf{9,9375_{10}} \end{aligned}$$

29.) Welchem Dezimalwert entspricht die Quartalzahl 11,22₄ ?

$$\begin{aligned} 11,22_4 &= 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{-2} \\ &= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16} \\ &= 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \mathbf{5,625_{10}} \end{aligned}$$

oder:

1	1	2	2
01	01	,	10 10

$$\begin{aligned} &2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} \\ &4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \mathbf{5,625_{10}} \end{aligned}$$

6.3 Das Grundrechnen mit Quartalzahlen

<u>z. B.:</u>	$\begin{array}{r} 301,2_4 \\ + 212,3_4 \\ \hline 1120,1_4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 49,50_{10} \\ + 38,75_{10} \\ \hline 88,25_{10} \end{array}$	<u>z. B.:</u>	$\begin{array}{r} 301,2_4 \\ - 212,3_4 \\ \hline 22,3_4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 49,50_{10} \\ - 38,75_{10} \\ \hline 10,75_{10} \end{array}$
---------------	--	--	---------------	--	--

30.) Addieren Sie im Quartalsystem!

<p>a) $\begin{array}{r} 312,2_4 \\ + 123,3_4 \\ \hline 1102,1_4 \end{array}$</p> <p>c) $\begin{array}{r} 300,2_4 \\ + 211,3_4 \\ \hline 1112,1_4 \end{array}$</p>	<p>$\begin{array}{r} 54,50_{10} \\ + 27,75_{10} \\ \hline 82,25_{10} \end{array}$</p> <p>$\begin{array}{r} 48,50_{10} \\ + 37,75_{10} \\ \hline 86,25_{10} \end{array}$</p>
<p>b) $\begin{array}{r} 232,1_4 \\ + 133,2_4 \\ \hline 1031,3_4 \end{array}$</p>	<p>$\begin{array}{r} 46,25_{10} \\ + 31,50_{10} \\ \hline 77,75_{10} \end{array}$</p>

31.) Subtrahieren Sie im Quartalsystem!

<p>a) $\begin{array}{r} 312,2_4 \\ - 123,3_4 \\ \hline 122,3_4 \end{array}$</p> <p>c) $\begin{array}{r} 300,2_4 \\ - 211,3_4 \\ \hline 22,3_4 \end{array}$</p>	<p>$\begin{array}{r} 54,50_{10} \\ - 27,75_{10} \\ \hline 26,75_{10} \end{array}$</p> <p>$\begin{array}{r} 48,50_{10} \\ - 37,75_{10} \\ \hline 10,75_{10} \end{array}$</p>
<p>b) $\begin{array}{r} 232,1_4 \\ - 133,2_4 \\ \hline 32,3_4 \end{array}$</p>	<p>$\begin{array}{r} 46,25_{10} \\ - 31,50_{10} \\ \hline 14,75_{10} \end{array}$</p>

7 Das Umrechnen zwischen Hexadezimal-, Oktal-, Quartal- und Dualsystem

Werden die Ziffern einer Dualzahl beginnend ab dem Komma zu Zweier-, Dreier- (auch: Triaden) oder Viererblöcken (auch: Tetraden) zusammengefasst, ergeben sich die Ziffern der gleichwertigen Quartal-, Oktal- bzw. Hexadezimalzahl.

z. B.: Wandeln Sie die Dualzahl $110110010,0111_2$ in eine Quartal-, eine Oktal- und eine Hexadezimalzahl!

$$110110010,0111_2 = \boxed{01} \boxed{10} \boxed{11} \boxed{00} \boxed{10} , \boxed{01} \boxed{11} = \mathbf{12302,13_4}$$

$$110110010,0111_2 = \boxed{110} \boxed{110} \boxed{010} , \boxed{011} \boxed{100} = \mathbf{662,34_8}$$

$$110110010,0111_2 = \boxed{0001} \boxed{1011} \boxed{0010} , \boxed{0111} = \mathbf{1B2,7_{16}}$$

32.) Wandeln Sie die Dualzahl $100101010,1010_2$ in eine Quartal-, eine Oktal- und eine Hexadezimalzahl!

$$100101010,1010_2 = \boxed{01} \boxed{00} \boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} , \boxed{10} \boxed{10} = \mathbf{10222,22_4}$$

$$100101010,1010_2 = \boxed{100} \boxed{101} \boxed{010} , \boxed{101} \boxed{000} = \mathbf{452,50_8}$$

$$100101010,1010_2 = \boxed{0001} \boxed{0010} \boxed{1010} , \boxed{1010} = \mathbf{12A,A_{16}}$$

33.) Wandeln Sie die Dualzahl $1110010011,0101_2$ in eine Quartal-, eine Oktal- und eine Hexadezimalzahl!

$$1110010011,0101_2 = \boxed{11} \boxed{10} \boxed{01} \boxed{00} \boxed{11} , \boxed{01} \boxed{01} = \mathbf{32103,11_4}$$

$$1110010011,0101_2 = \boxed{001} \boxed{110} \boxed{010} \boxed{011} , \boxed{010} \boxed{100} = \mathbf{1623,24_8}$$

$$1110010011,0101_2 = \boxed{0011} \boxed{1001} \boxed{0011} , \boxed{0101} = \mathbf{393,5_{16}}$$

34.) Wandeln Sie die Quartalzahl $1233,23_4$ in eine Oktal- und eine Hexadezimalzahl!

$$\begin{aligned} 1233,23_4 &= \boxed{01} \boxed{10} \boxed{11} \boxed{11} , \boxed{10} \boxed{11} \\ &= \boxed{001} \boxed{101} \boxed{111} , \boxed{101} \boxed{100} = \mathbf{157,54_8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1233,23_4 &= \boxed{01} \boxed{10} \boxed{11} \boxed{11} , \boxed{10} \boxed{11} \\ &= \boxed{0110} \boxed{1111} , \boxed{1011} = \mathbf{6F,B_{16}} \end{aligned}$$

35.)

Wandeln Sie die Quartalzahl 1302,02₄ in eine Oktal- und eine Hexadezimalzahl!

$$\begin{aligned}
 1302,02_4 &= \boxed{01} \boxed{11} \boxed{00} \boxed{10} , \boxed{00} \boxed{10} \\
 &= \boxed{001} \boxed{110} \boxed{010} , \boxed{001} = \mathbf{162,1_8} \\
 1302,02_4 &= \boxed{01} \boxed{11} \boxed{00} \boxed{10} , \boxed{00} \boxed{10} \\
 &= \boxed{0111} \boxed{0010} , \boxed{0010} = \mathbf{72,2_{16}}
 \end{aligned}$$

36.)

Wandeln Sie die Oktalzahl 2307,57₈ in eine Quartal- und eine Hexadezimalzahl!

$$\begin{aligned}
 2307,57_8 &= \boxed{010} \boxed{011} \boxed{000} \boxed{111} , \boxed{101} \boxed{100} \\
 &= \boxed{01} \boxed{00} \boxed{11} \boxed{00} \boxed{01} \boxed{11} , \boxed{10} \boxed{11} = \mathbf{103013,233_4} \\
 2307,57_8 &= \boxed{010} \boxed{011} \boxed{000} \boxed{111} , \boxed{101} \boxed{100} \\
 &= \boxed{0100} \boxed{1100} \boxed{0111} , \boxed{1011} = \mathbf{4C7,BC_{16}}
 \end{aligned}$$

37.)

Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte!

	Dual-system	Quartal-system	Oktal-system	Dezimal-system	Hexadezimal-system
Dual-system	10101010101	111111	2525	1365	555
Quartal-system	110011001	12121	631	409	199
Oktal-system	111000111	13013	707	455	1C7
Dezimal-system	111100001	13201	741	481	1E1
Hexadez.-system	110011101	12131	635	413	19D