Das Differenzialrechnen

Ansätze zur Differenzialrechnung gab es bereits Ende des 16. Jahrhunderts. Diese Ansätze entwickelten Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 – 1716) und Isaac NEWTON (1643 – 1727) gleichzeitig, aber unabhängig voneinander, weiter. LEIBNIZ ging dabei vom Tangentenproblem aus und führte die noch heute gültige Schreibweise für den Differenzialquotienten und das Integral ein; NEWTON entwickelte bei der Ableitung des Gravitationsgesetzes aus den von Johannes KEPLER (1571 – 1630) gefundenen Gesetzen über die Bewegung der Planeten seine Fluxionsrechnung.
Heute ist die Differenzialrechnung unentbehrlicher Bestandteil der Mathematik und hilft, die Beschreibung kontinuierlicher Abläufe z. B. in der Physik mathematisch zu präzisieren.

1 Die Eigenschaften von Zahlenfolgen

Der zentrale Begriff in der Differenzialrechnung ist der Begriff **Grenzwert**.
Weitere wichtige Begriffe sind **Konvergenz** und **Divergenz**, **Monotonie**, **Stetigkeit**, **Differenzierbarkeit** und **Integrierbarkeit**.

Zwecks Erläuterung des Begriffs Grenzwert werden die **Zahlenfolgen** betrachtet.

Eine **Folge** (auch: reelle Zahlenfolge) ist eine geordnete Menge von Zahlen. Die einzelnen Zahlen heißen Glieder dieser Folge.

Bildungsgesetz (auch: allgemeines Glied)
↓

Beispiele:

$\langle a_n \rangle = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots = \{ \mathbf{n} \}$

$\langle a_k \rangle = 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; \ldots = \{ \mathbf{2 \cdot k} \}$

$\langle a_m \rangle = 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; \ldots = \{ \mathbf{m^2} \}$

arithmetische Folge:

Eine Zahlenfolge a_k heißt **arithmetische Folge**, wenn für jedes Glied der Folge gilt:

$$a_{k+1} = a_k + d$$

	n = 1		n = 2		n = 3		n = 4				n = k		n = k + 1		
Beispiel:	a	;	$a + d$	;	$a + 2d$	;	$a + 3d$	;	**...**	;	$a + (k-1)d$	;	$a + kd$	;	**...**
	3	;	7	;	11	;	15	;	**...**						

$d = 4$ $\quad d = 4 \quad d = 4$

Der Abstand d zwischen aufeinander folgenden Gliedern ist jeweils gleich.

$d \cdot n \pm c$ (d ... Abstand/Differenz, n ... Laufvariable, c ... Korrektiv)

$4 \cdot 1 - 1 \quad 4 \cdot 2 - 1 \quad 4 \cdot 3 - 1 \quad 4 \cdot 4 - 1 \quad \ldots = \quad \mathbf{\langle a_k \rangle = 4n - 1}$

Der Abstand d lässt sich auch wie folgt ermitteln: $\boxed{d = \dfrac{a_{k2} - a_{k1}}{k_2 - k_1}}$

Beispiel: geg.: $a_2 = -3$

$a_5 = -12$

ges.: $d = \dfrac{(-12) - (-3)}{5 - 2} = \mathbf{-3}$

1.) Ermitteln Sie die Bildungsvorschriften für folgende arithmetischen Folgen!

a)	-1	;	-4	;	-7	;	-10	;	-13	; ...	
b)	-2	;	3	;	8	;	13	;	18	; ...	
c)	$\frac{7}{2}$	;	2	;	$\frac{1}{2}$	;	-1	;	$-\frac{5}{2}$	; ...	

2.) Von einer arithmetischen Folge sind die Glieder $a_3 = 70$ und $a_7 = 30$ bekannt. Wie heißt die Bildungsvorschrift a_n für diese Zahlenfolge?

geometrische Folge:

Eine Zahlenfolge a_k heißt **geometische Folge**, wenn für jedes Glied der Folge gilt:

$$a_{k+1} = a_k \cdot q$$

Beispiel:

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$				$n = k$		$n = k + 1$	
	a	;	$a \cdot q$	;	$a \cdot q^2$	;	$a \cdot q^3$	;	...	;	$a \cdot q^{k-1}$	;	$a \cdot q^k$	; ...

$-3 \;;\; -\frac{3}{2} \;;\; -\frac{3}{4} \;;\; -\frac{3}{8} \;;\; \ldots$

$q = ½$ $\qquad q = ½$ $\qquad q = ½$

Der Faktor q zwischen aufeinander folgenden Gliedern ist jeweils gleich.

$A \cdot q^{n \pm c}$ (A ... Anfangswert, q... Quotient, n ... Laufvariable, c ... Korrektiv)

$-3 \cdot (½)^0 \quad -3 \cdot (½)^1 \quad -3 \cdot (½)^2 \quad -3 \cdot (½)^3 \quad \ldots \quad = \quad \langle \mathbf{a_k} \rangle = \mathbf{-3 \cdot (½)^{n-1}}$

Die Summe s_n lässt sich auch wie folgt ermitteln:

$$s_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$$

3.) Ermitteln Sie die Bildungsvorschriften für folgende geometrischen Folgen!

a)	$3 \;;\; 9 \;;\; 27 \;;\; 81 \;;\; 243 \;;\; \ldots$	
b)	$1 \;;\; 2 \;;\; 4 \;;\; 8 \;;\; 16 \;;\; \ldots$	
c)	$-\frac{8}{27} \;;\; \frac{4}{9} \;;\; -\frac{2}{3} \;;\; 1 \;;\; -\frac{3}{2} \;;\; \ldots$	

4.) Vervollständigen Sie folgende Tabelle für geometrische Zahlenfolgen!

	a_1	q	n	a_n	s_n	Bildungs-vorschrift
a)	2	–1	4			
b)	2	2		16		
c)	2	3			242	
d)		–2		–64	–42	

5.) Ermitteln Sie für die reellen Zahlenfolgen jeweils den Definitionsbereich!

a) $a_n = \frac{n^2}{n-3}$	
b) $a_n = \frac{2n}{2n-8}$	
c) $a_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}$	

6.) Ermitteln Sie jeweils die ersten fünf Glieder der reellen Zahlenfolgen!

a) $a_n = 4n - 1$	
b) $a_n = n^2 - 1$	
c) $a_n = \frac{1}{n}$	
d) $a_n = (n + 1)^2$	
e) $a_n = (n - 1)^3$	
f) $a_n = (n - 4)^2$	
g) $a_n = 2^n$	
h) $a_n = 3^{n-1}$	
i) $a_n = \frac{2-n}{n+1}$	
j) $a_n = (-1)^n$	
k) $a_n = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}$	
l) $a_n = \frac{n^3}{(n+1)^2}$	
m) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^2$	
n) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$	
o) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$	

7.) Ermitteln Sie die Bildungsvorschriften für folgende Zahlenfolgen!

a)	4 ; 8 ; 12 ; 16 ; 20 ; ...	
b)	1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; ...	
c)	$1 \; ; \; \frac{1}{4} \; ; \; \frac{1}{9} \; ; \; \frac{1}{16} \; ; \; \frac{1}{25} \; ; \; \ldots$	
d)	2 ; 8 ; 18 ; 32 ; 50 ; ...	
e)	$2 \; ; \; \frac{3}{2} \; ; \; \frac{4}{3} \; ; \; \frac{5}{4} \; ; \; \frac{6}{5} \; ; \; \ldots$	
f)	2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162 ; ...	
g)	1 ; 2 ; 5 ; 12 ; 27 ; ...	

8.) Ermitteln Sie die Bildungsvorschriften für folgende geometrischen Folgen!

a)	2 ; 8 ; 32 ; 128 ; 512 ; ...	
b)	$18 \; ; \; 3 \; ; \; \frac{1}{2} \; ; \; \frac{1}{12} \; ; \; \frac{1}{72} \; ; \; \ldots$	
c)	$\frac{14}{3} \; ; \; -7 \; ; \; 10{,}5 \; ; \; -15\frac{3}{4} \; ; \; \frac{189}{8} \; ; \; \ldots$	

Endlichkeit:

Eine Folge a_n mit $t \in N$ und $n \leq t$ heißt **endliche** Folge.

Beispiele: $a_n = 2n$ mit $1 \leq n \leq 3$ ist eine endliche Folge mit den drei Gliedern $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 6$

$a_n = 2n$ mit $n \in N$ ist eine unendliche Folge mit unendlich vielen Gliedern: $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, ...

Monotonie:

Eine Folge a_n heißt streng **monoton steigend**, wenn für alle $n \in N$ gilt: $a_{n+1} > a_n$

Eine Folge a_n heißt streng **monoton fallend**, wenn für alle $n \in N$ gilt: $a_{n+1} < a_n$

Eine Folge a_n heißt **konstant**, wenn für alle $n \in N$ gilt: $a_{n+1} = a_n$

Beschränktheit:

Eine Folge a_n heißt **beschränkt**, wenn es eine positive Zahl S gibt, so dass für alle $n \in N$ gilt: $| a_n | \leq S$.

Die Zahl S heißt **Schranke** der Folge a_n.

→ Eine monoton steigende Folge a_n ist immer nach unten beschränkt.
Die untere Schranke ist $S_u = a_1$.

→ Eine monoton fallende Folge a_n ist immer nach oben beschränkt.
Die obere Schranke ist $S_o = a_1$.

Konvergenz:

Eine Folge a_n , die einen Grenzwert hat, heißt **konvergent**.

Eine Folge a_n , die keinen Grenzwert hat, heißt **divergent**.

Eine Folge a_n , die den Grenzwert 0 hat, heißt **Nullfolge**.

„konvergent“ ≈ „zusammenstrebend“
„divergent“ ≈ „auseinandergehend“

Stetigkeit:

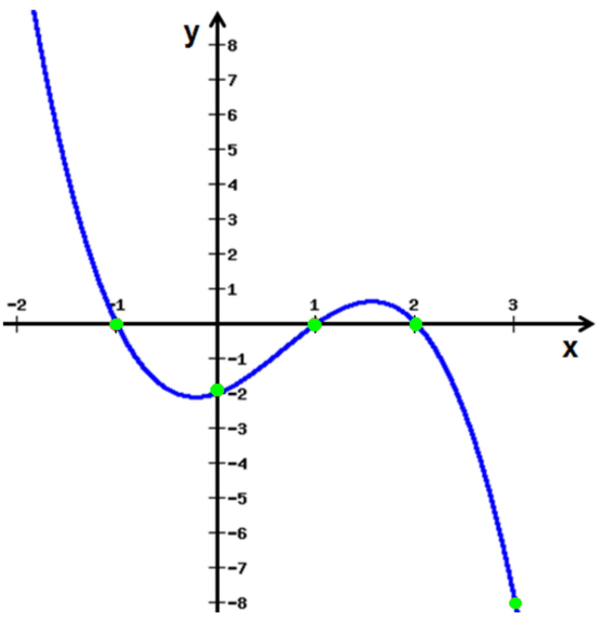
Eine Funktion heißt **stetig**, wenn ihr Kurvenbild einen ununterbrochenen Linienzug aufweist.
Weist das Kurvenbild einer Funktion in ihrem Linienzug an einer Stelle eine Unterbrechung auf, so heißt diese Funktion an dieser Stelle **unstetig**.

Beispiel 1: **$y = -x^3 + 2x^2 + x - 2$**

Wertetabelle:

x = –5,00	y = 168,0000
x = –4,00	y = 90,0000
x = –3,00	y = 40,0000
x = –2,00	y = 12,0000
x = –1,00	**y = 0,0000**
x = 0,00	**y = –2,0000**
x = 0,50	y = –1,1250
x = 1,00	**y = 0,0000**
x = 1,50	y = 0,6250
x = 2,00	**y = 0,0000**
x = 3,00	**y = –8,0000**
x = 4,00	y = –30,0000
x = 5,00	y = –72,0000

Diese Funktion ist **stetig**.



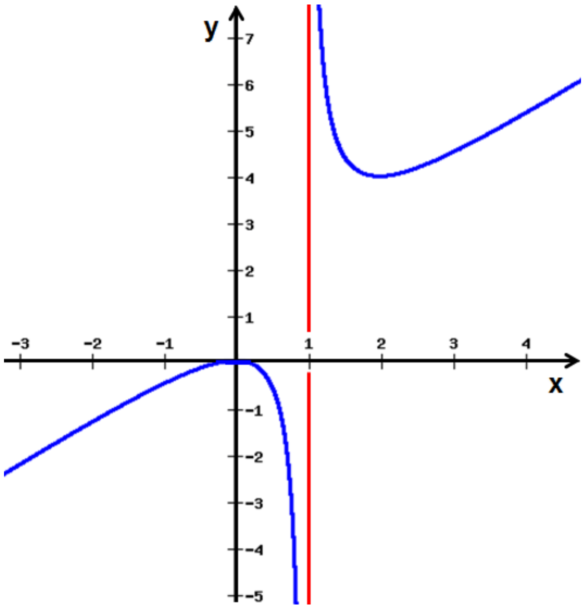
Beispiel 2:

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

Wertetabelle:

x = –3,00	y = –2,2500
x = –2,00	y = –1,3333
x = –1,00	y = –0,5000
x = 0,00	y = 0,0000
x = 0,50	y = –0,5000
x = 0,75	y = –0,3214
x = 1,00	y = **nicht definiert**
x = 1,25	y = 6,2500
x = 1,50	y = 4,5000
x = 2,00	y = 4,0000
x = 3,00	y = 4,5000

Diese Funktion ist **unstetig**.



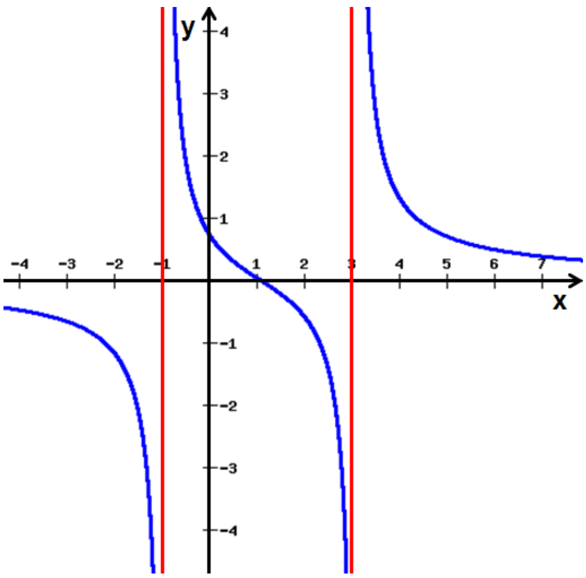
Beispiel 3:

$$y = \frac{2x-2}{x^2-2x-3}$$

Wertetabelle:

x = –4,00	y = –0,4762
x = –3,00	y = –0,6667
x = –2,00	y = –1,2000
x = –1,00	y = **nicht definiert**
x = 0,00	y = 0,6667
x = 1,00	y = 0,0000
x = 2,00	y = –0,6667
x = 3,00	y = **nicht definiert**
x = 4,00	y = 1,2000
x = 5,00	y = 0,6667

Diese Funktion ist **unstetig**.



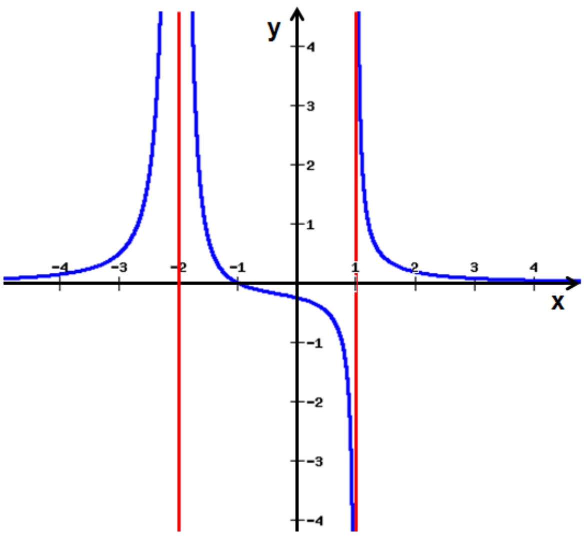
Beispiel 4:

$$y = \frac{x+1}{x^3+3x^2-4}$$

Wertetabelle:

x = –4,00	y = 0,1500
x = –3,00	y = 0,5000
x = –2,00	y = **nicht definiert**
x = –1,00	y = 0,0000
x = 0,00	y = –0,2500
x = 1,00	y = **nicht definiert**
x = 2,00	y = 0,1875
x = 3,00	y = 0,0800
x = 4,00	y = 0,0463

Diese Funktion ist **unstetig**.



9.)

	Bestimmen Sie jeweils die Eigenschaften der reellen Zahlenfolgen!		
	Bildungs-vorschrift	Glieder der Zahlenfolge a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4 ; a_5 ; ...	Eigenschaften
a)	$a_n = 3n$	3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; 21 ; 24 ; 27 ; 30 ; ...	
b)	$a_n = 3n - 4$	–1 ; 2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20 ; ...	
c)	$a_n = 4 - 3n$	1 ; –2 ; –5 ; –8 ; –11 ; –14 ; –17 ; –20 ; ...	
d)	$a_n = \frac{8}{n}$	8 ; 4 ; $^8/_3$; 2 ; $^8/_5$; $^4/_3$; $^8/_7$; 1 ; $^8/_9$; $^4/_5$; $^8/_{11}$; ...	
e)	$a_n = n - n^2$	0 ; –2 ; –6 ; –12 ; –20 ; –30 ; –42 ; –56 ; –72 ; ...	
f)	$a_n = n^2 - n$	0 ; 2 ; 6 ; 12 ; 20 ; 30 ; 42 ; 56 ; 72 ; ...	
g)	$a_n = (n - 3)^2$	4 ; 1 ; 0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; ...	
h)	$a_n = (-1)^n$	–1 ; 1 ; –1 ; 1 ; –1 ; 1 ; –1 ; 1 ; –1 ; 1 ; –1 ; ...	
i)	$a_n = (-2)^n$	–2 ; 4 ; –8 ; 16 ; –32 ; 64 ; –128 ; 256 ; ...	
j)	$a_n = \frac{1}{n+1}$	½ ; $^1/_3$; ¼ ; $^1/_5$; $^1/_6$; $^1/_7$; $^1/_8$; $^1/_9$; $^1/_{10}$; ...	
k)	$a_n = (-\frac{1}{2})^n$	– ½ ; ¼ ; – $^1/_8$; $^1/_{16}$; – $^1/_{32}$; $^1/_{64}$; – $^1/_{128}$; ...	
l)	$a_n = \frac{n+1}{2n-1}$	2 ; 1 ; $^4/_5$; $^5/_7$; $^2/_3$; $^7/_{11}$; $^8/_{13}$; $^9/_{15}$; $^{10}/_{17}$; ...	

10.) Gegeben sind die beiden Zahlenfolgen $\langle a_k \rangle = 2k - 4$ und $\langle a_k \rangle = 2k - k^3$
Wie heißen die ersten fünf Glieder dieser Zahlenfolgen? Welche Eigenschaften besitzen diese Zahlenfolgen?

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
$\langle a_k \rangle = 2k - 4$					
$\langle a_k \rangle = 2k - k^3$					

11.) Von einer arithmetischen Zahlenfolge sind das Glied $a_1 = 2\frac{1}{2}$ und das allgemeine Glied $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}$ bekannt.

Ermitteln Sie die Glieder a_2, a_3, a_4 und a_5!

Wie heißt die Bildungsvorschrift für diese Zahlenfolge?

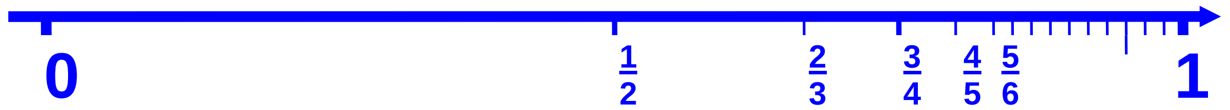
$a_2 =$		$a_3 =$	
$a_4 =$		$a_5 =$	
$\langle a_k \rangle =$			

12.) Gegeben sind die Glieder $a_3 = 12$, $a_4 = 36$ der geometrischen Zahlenfolge $\langle a_k \rangle$. Ermitteln Sie die Glieder a_1, a_2 und a_6 sowie die Bildungsvorschrift der Zahlenfolge!

2 Das Berechnen der Grenzwerte

Gegeben ist die Zahlenfolge $\langle a_k \rangle = \dfrac{k-1}{k}$ mit $k > 0$,

also $0 \;;\; \frac{1}{2} \;;\; \frac{2}{3} \;;\; \frac{3}{4} \;;\; \frac{4}{5} \;;\; \frac{5}{6} \;;\; \frac{6}{7} \;;\; \ldots \;;\; \frac{k-1}{k} \;;\; \ldots$



Mit größer werdendem k streben die Glieder der Zahlenfolge immer mehr dem Wert 1 zu, ohne ihn jedoch jemals zu erreichen.
Der Wert 1 wird in diesem Fall als **Grenzwert** bezeichnet:

$$\lim_{k \to \propto} \frac{k-1}{k} = 1$$

„Der Limes $\dfrac{k-1}{k}$ gegen Unendlich <u>ist gleich</u> 1."

↑
nähert sich
strebt nach
konvergiert nach

13.) Welchem Grenzwert strebt die Folge $\langle a_k \rangle = \dfrac{1}{k}$ nach?

14.) Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{k \to \propto} \dfrac{k^2 - 2k + 10}{2k^2 - k}$

b) $\lim\limits_{m \to \propto} \dfrac{2 + 2m}{6m}$

c) $\lim\limits_{n \to \propto} \dfrac{n^2 + 4n}{4n^2}$

15.) Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{k+2}{3k+1}$	
b) $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{2-m^3}{10m^3+m}$	
c) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{4}$	

Mithilfe der Grenzwertsätze können Grenzwerte leicht ermittelt werden:

(1) $$\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \pm \lim_{n \to \infty} b_n = a \pm b$$

(2) $$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n = a \cdot b$$

(3) $$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} a_n}{\lim\limits_{n \to \infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

16.) Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!

a) $\lim\limits_{a \to \infty} \dfrac{4}{a^2}$	
b) $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{8k+1}{2k^2-1}$	
c) $\lim\limits_{m \to \infty} \dfrac{5m^2-3m+7}{4m^2+2m+1}$	

17.)	Ermitteln Sie folgende Grenzwerte!	
	a) $a_n = \dfrac{12n - 3}{3n + 3}$	
	b) $a_m = \dfrac{2m^2 - 2}{m + 2}$	
	c) $a_k = \dfrac{6k + 4}{3k^2 - 4}$	

18.) Ermitteln Sie den Grenzwert der Funktion $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ an der Stelle x = 3 !

19.) Ermitteln Sie den Grenzwert der Funktion $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ an der Stelle x = 2 !

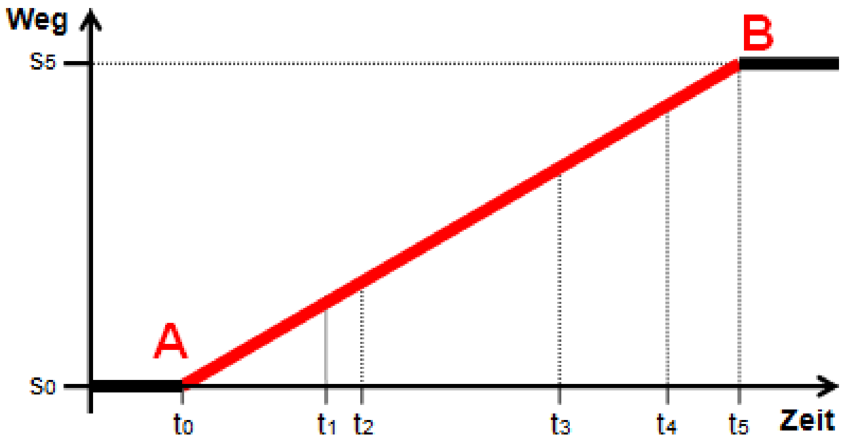
20.) Ermitteln Sie den Grenzwert der Funktion $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ an der Stelle x = 1 !

21.) Ermitteln Sie für die geometrische Folge **16 ; 4 ; 1 ;** $\mathbf{\frac{1}{4}}$ **;** $\mathbf{\frac{1}{16}}$ **; ...**
den Quotienten q, die Bildungsvorschrift und den Grenzwert g!

22.) Ermitteln Sie für die geometrische Folge 1 ; 1,1 ; 1,21 ; 1,331 ; **...**
den Quotienten q, die Bildungsvorschrift und den Grenzwert g!

3 Der Differenzenquotient und der Differenzialquotient

Ein Zug fährt von A nach B. Würde der Zug die Strecke von A nach B mit konstanter Geschwindigkeit zurücklegen, ergäbe dies folgendes Weg-Zeit-Diagramm:



Der Quotient aus den Differenzen

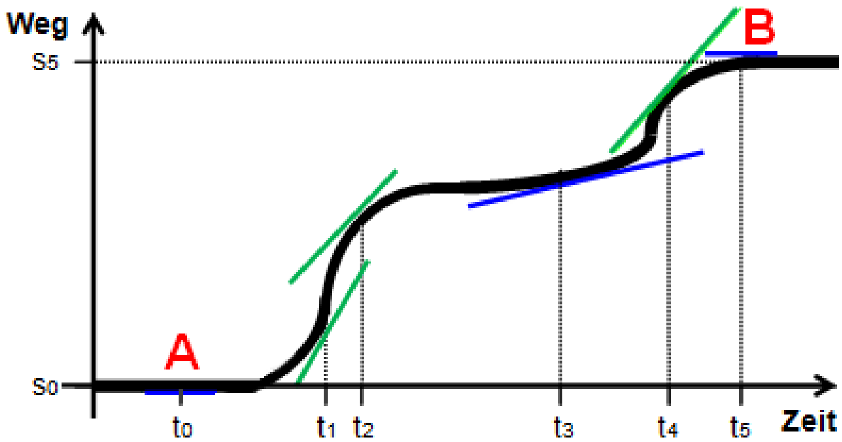
$s_5 - s_0$ und $t_5 - t_0$

ergibt die mittlere Geschwindigkeit des Zuges für die Strecke von A nach B.

In der Realität legt der Zug aber niemals die Strecke von A nach B mit konstanter Geschwindigkeit zurück.

Zum Zeitpunkt t_0 steht der Zug noch im Bahnhof von A und beginnt seine – zunächst langsame – Fahrt. Zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 fährt der Zug sehr schnell, bremst stark ab usw.

Schließlich kommt der Zug zum Zeitpunkt t_5 im Bahnhof von B zum Halten.



Je **steiler** die Kurve verläuft, desto schneller fährt der Zug.

Je **flacher** die Kurve verläuft, desto langsamer fährt der Zug.

Der Differenzenquotient einer Funktion:

Die gekrümmte Kurve (s. Abbildung) kann als Bild der Funktion s = f(t) im Intervall mit den Abszissen t_0 und t_5 und den Ordinaten s_0 und s_5 aufgefasst werden.
Die Gerade durch die Punkte $A(s_0;t_0)$ und $B(s_1;t_1)$ ist eine Sekante der Kurve. Nach den Regeln der analytischen Geometrie hat diese Gerade den Anstieg

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \qquad \text{dividierte Differenzen}$$

In den Naturwissenschaften werden viele Größen als **Differenzenquotienten** (= dividierte Differenzen) ausgedrückt,
z. B. die mittlere Geschwindigkeit des Zuges auf der Strecke zwischen A und B,
die Durchschnittstemperatur in der Stadt Dresden im Monat Juli,
die mittlere Dichte.

Der Differenzialquotient einer Funktion (auch: Ableitung):

Der Differenzenquotient $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ gibt die Geschwindigkeit des Zuges zum Zeitpunkt t_i umso genauer wieder, je näher man an den Punkt $P(s_i; t_i)$ rückt.

Der Winkel α nimmt einen **Grenzwert** ϕ_0 an, der den Winkel zwischen der t–Achse und der Tangente angibt.
tan ϕ_0 ist der Anstieg der Tangente, der als Anstieg der Kurve im Punkt P angesehen wird. Dieser Anstieg lässt sich auch rechnerisch ermitteln:

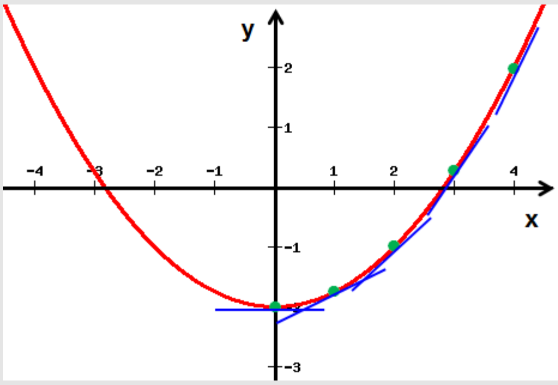
mithilfe des Differenzenquotienten $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ für den Fall, dass Δt gegen 0 strebt.

Dieser Grenzwert heißt **Differenzialquotient** oder **1. Ableitung** der Funktion s = f(t) an der Stelle t_0.

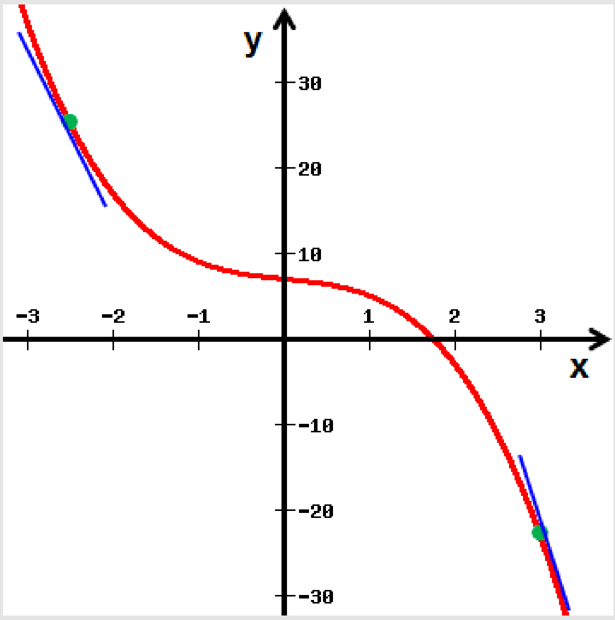
$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0+\Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}}$$

Bedeutung: Die erste Ableitung einer Funktion zeigt den Anstieg der Tangente an diesem Punkt.

23.) Welchen Winkel haben die Tangenten, die die Funktion $\mathbf{y = f(x) = \frac{1}{4} x^2 - 2}$ in den Punkten $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ und $x_5 = 4$ schneiden?



24.) Welchen Winkel haben die Tangenten, die die Funktion $\mathbf{y = f(x) = -x^3 + 2x^2 - 4x + 7}$ in den Punkten $x_1 = -2{,}5$ und $x_2 = 3$ schneiden?



25.) Ermitteln Sie für die folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $y = f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 6x + 7$	$y' = f'(x) =$	
b) $y = f(x) = 6x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2$	$y' = f'(x) =$	
c) $y = f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x$	$y' = f'(x) =$	

Regeln für das Differenzieren:

	allgemeiner Ausdruck	1. Ableitung
Konstante	$y = f(x) = c$	$y' = f'(x) = 0$ Beispiel: $y = f(x) = 3$ $y' = f'(x) = 0$
Faktorregel: konstanter Faktor	$y = f(x) = a \cdot f(x)$	$y' = f'(x) = a \cdot f'(x)$ Beispiel: $y = f(x) = 3 \cdot x^2$ $y' = f'(x) = 6x$
Summenregel: Summe/Differenz von Funktionen	$y = f(x) = u(x) \pm v(x)$	$y' = f'(x) = u' \pm v'$ Beispiel: $y = f(x) = 4x^3 \pm 2x^2$ $y' = f'(x) = 12x^2 \pm 4x$
Produktregel: Produkt von Funktionen	$y = f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$y' = f'(x) = u'v + uv'$ Beispiel: $y = f(x) = x^2 \cdot (2x - 2)$ $y' = f'(x) = 2x \cdot (2x-2) + 2x^2$
Quotientenregel: Quotient von Funktionen	$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ Beispiel: $y = f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$ $y' = f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 1}{(x - 1)^2}$
Kettenregel:	$y = f(x) = f(u)$ mit $u = \varphi(x)$	$y' = f'(x) = f'(u) \cdot \varphi'(x)$ Beispiel: $y = f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$ $y' = f'(x) = 6 \cdot \cos(2x)$

26.) Ermitteln Sie für die folgenden Funktionen jeweils die 1. Ableitung!

a) $y = f(x) = x$	$y' = f'(x) =$
b) $y = f(x) = -6$	$y' = f'(x) =$
c) $y = f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$	$y' = f'(x) =$
d) $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$	$y' = f'(x) =$
e) $y = f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$	$y' = f'(x) =$
f) $y = f(x) = \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}} = 4 \cdot x^{-3/4}$	$y' = f'(x) =$
g) $y = f(x) = \frac{12}{\sqrt[3]{x^2}} = 12 \cdot x^{-2/3}$	$y' = f'(x) =$

27.) Ermitteln Sie für die Funktion $\mathbf{y = f(x) = (x + 1) \cdot (2x - 2)}$ die 1. Ableitung!

28.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = (2x^2 + 2) \cdot (3x^3 - 2x^2 + x - 7)$ die 1. Ableitung!

29.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = (x^2 + x + 1) \cdot (3x^3 - 2x^2 - 3x + 3)$ die 1. Ableitung!

30.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 2}$ die 1. Ableitung!

31.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x \cdot \sqrt[3]{x}}$ die 1. Ableitung!

32.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = \sqrt[3]{3} \cdot x \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{x}}$ die 1. Ableitung!

33.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = \sqrt[3]{\frac{4}{x^2}} \cdot x \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{x^4}}$ die 1. Ableitung!

34.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = 0{,}04 \cdot \sqrt{\frac{6{,}25}{x^8}} \cdot \sqrt{\frac{4}{x^2}}$ die 1. Ableitung!

35.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = 3ax^2 - 2a^2x^3$**
die erste, die zweite und die dritte Ableitung!

36.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(a) = 3ax^2 - 2a^2x^3$**
die erste, die zweite und die dritte Ableitung!

37.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(c) = 3ax^2 - 2a^2x^3$**
die erste, die zweite und die dritte Ableitung!

38.) Ermitteln Sie für die Funktion **y = f(x) =** $-\sqrt{-2c} \bullet x^{-1} \bullet \sqrt{\frac{-8c}{x^2}} \bullet 3cx$

die erste, die zweite und die dritte Ableitung!

39.) Ermitteln Sie für die Funktion **y = f(c) =** $-\sqrt{-2c} \bullet x^{-1} \bullet \sqrt{\frac{-8c}{x^2}} \bullet 3cx$

die erste, die zweite und die dritte Ableitung!

40.) Ermitteln Sie für die Funktion **y = f(a) =** $-\sqrt{-5ab^2c^3}$ **• x •** $\sqrt{\frac{10}{a^{-1}}}$ **• bx² •** $\sqrt{\frac{c}{-2}}$ die erste, die zweite und die dritte Ableitung!

$\sqrt{-5ab^2c^3}$

41.) Ermitteln Sie für die Funktion **y = f(b) =** $-\sqrt{-5ab^2c^3}$ **• x •** $\sqrt{\frac{10}{a^{-1}}}$ **• bx² •** $\sqrt{\frac{c}{-2}}$ die erste, die zweite und die dritte Ableitung!

42.) Ermitteln Sie für die Funktion **y = f(c) =** $-\sqrt{-5ab^2c^3}$ **• x •** $\sqrt{\frac{10}{a^{-1}}}$ **• bx² •** $\sqrt{\frac{c}{-2}}$ die erste, die zweite und die dritte Ableitung!

43.) Ermitteln Sie für die Funktion **y = f(x) =** $-\sqrt{-5ab^2c^3}$ **• x •** $\sqrt{\frac{10}{a^{-1}}}$ **• bx² •** $\sqrt{\frac{c}{-2}}$ die erste, die zweite und die dritte Ableitung!

Übungen zur Kettenregel:

Beispiel 1: $y = (4x^2 + 3x)^5$

Beispiel 2: $y = \sqrt{4x^2 + 3x}$

Beispiel 3: $y = 2 \cdot \cos(4x)$

äußere Funktion ↓ innere Funktion ↓ mittelbare Funktion ↓

Kettenregel:

$y = g(z)$ mit $z = h(x)$ also: $y = f(x) = g[\,h(x)\,]$

Die Ableitung einer mittelbaren Funktion ist das Produkt aus den Ableitungen der inneren und der äußeren Funktion:

$$y' = f'(x) = g'(z) \cdot h'(x)$$

44.) Ermitteln Sie für die Funktion $\mathbf{y = f(x) = (2x^3 - 3x^2)^4}$ die 1. Ableitung!

45.) Ermitteln Sie für die Funktion $\mathbf{y = f(x) = (2x^2 - 3)^7}$ die 1. Ableitung!

46.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = (3x^2 - 1)^{10}$** die 1. Ableitung!

47.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = \sqrt{4x - 1}$** die 1. Ableitung!

48.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x}$** die 1. Ableitung!

49.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = \sqrt[3]{3x^3 - x^2}$** die 1. Ableitung!

Ableitungen einiger besonderer Funktionen:

Ein **Axiom** ist eine grundlegende Aussage, die unbewiesen angenommen wird und zusammen mit anderen Axiomen ein logisches System stützt und verstehbar macht.

Ableitung der …	allgemeiner Ausdruck	1. Ableitung
e-Funktion	$y = f(x) = e^x$	$y' = f'(x) = e^x$
Logarithmus-Funktion	$y = f(x) = \ln(x)$	$y' = f'(x) = \frac{1}{x}$
Sinus-Funktion	$y = f(x) = \sin(x)$	$y' = f'(x) = \cos(x)$
Cosinus-Funktion	$y = f(x) = \cos(x)$	$y' = f'(x) = -\sin(x)$
Tangens-Funktion	$y = f(x) = \tan(x)$	$y' = f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

50.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = 2 \bullet \sin(4x)$ die 1. Ableitung!

51.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = e^{2x}$ die 1. Ableitung!

52.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = e^{-3x + 2}$ die 1. Ableitung!

53.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}$** die 1. Ableitung!

54.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = e^{x^2}$** die 1. Ableitung!

55.) Ermitteln Sie für die Funktion $\mathbf{y = f(x) = -5 \cdot e^{3x^3}}$ die 1. Ableitung!

56.) Ermitteln Sie für die Funktion $\mathbf{y = f(x) = 3 \cdot \sin(2a^2x^3)}$ die 1. Ableitung!

57.) Ermitteln Sie für die Funktion $\mathbf{y = f(a) = 3 \cdot \sin(2a^2x^3)}$ die 1. Ableitung!

58.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(a) = 4 \cdot \cos(3a^2b^3c^4)$** die 1. Ableitung!

59.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(b) = 4 \cdot \cos(3a^2b^3c^4)$** die 1. Ableitung!

60.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(c) = 4 \cdot \cos(3a^2b^3c^4)$** die 1. Ableitung!

61.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = 2 \bullet e^{-4x} - 2 \bullet e^{3x^2}$ die 1. Ableitung!

62.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = -\sqrt[3]{(4x^3 - 3x^2)^2}$ die 1. Ableitung!

5 Das Ermitteln höherer Ableitungen

Bedeutung: Liefert die 1. Ableitung den Funktionswert Null ($y' = 0$), so besitzt die Funktion an dieser Stelle einen **lokalen Extrempunkt**:

Minimalpunkt (auch Tiefpunkt): $y' = 0$ und $y'' > 0$

Maximalpunkt (auch: Hochpunkt): $y' = 0$ und $y'' < 0$

Liefert die 2. Ableitung den Funktionswert Null ($y'' = 0$) und die 3. Ableitung den Funktionswert ungleich Null ($y''' \neq 0$), so besitzt die Funktion an dieser Stelle einen **Wendepunkt**.

63.) Ermitteln Sie für die Funktion $\mathbf{y = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 1}$ die lokalen Extrempunkte und den Wendepunkt!

64.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$** die lokalen Extrempunkte, den Wendepunkt und die Nullstellen!

65.) Ermitteln Sie für die Funktion $\mathbf{y = f(x) = \frac{1}{6}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{3}{2}\,x + 3}$

die lokalen Extrempunkte und den Wendepunkt!

66.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$** die lokalen Extrempunkte, den Wendepunkt und die Nullstellen!

67.) Ermitteln Sie für die Funktion $\mathbf{y = f(x) = \frac{x}{300} \cdot (x^2 - 45) \cdot (x^2 - 10)}$

die lokalen Extrempunkte und den Wendepunkt!

68.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2 + 3x$**

die lokalen Extrempunkte, den Wendepunkt und die Nullstellen!

69.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$** die lokalen Extrempunkte, den Wendepunkt und die Nullstellen!

70.) Ermitteln Sie für die Funktion $\mathbf{y = f(x) = -x^3 + 3x + 2}$ die lokalen Extrempunkte, den Wendepunkt und die Nullstellen!

71.) Ermitteln Sie für die Funktion

$$y = f(x) = \frac{1}{2} x^3 - 4$$

die lokalen Extrempunkte, den Wendepunkt und die Nullstellen!

Ein **Sattelpunkt** (auch: Terrassenpunkt, Horizontalwendepunkt) ist kein lokaler Extrempunkt, sondern ein spezieller Wendepunkt mit einer waagerechten Tangente. Für ihn gelten

$$y' = f'(x) = 0$$
$$y'' = f''(x) = 0$$
$$y''' = f'''(x) \neq 0$$

72.) Ermitteln Sie für die Funktion $y = f(x) = \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{8} x^2 - 3x + \frac{35}{24}$ die lokalen Extrempunkte, den Wendepunkt und die Nullstellen ($x_{N1} = -7$)!

73.) Ermitteln Sie für die Funktion **$y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$** die lokalen Extrempunkte, den Wendepunkt und die Nullstellen!

6 Die Stammfunktionen

Eine über D_f differenzierbare Funktion F heißt **Stammfunktion** von f, wenn gilt: **$F'(x) = f(x)$**

	Funktion	Stammfunktionen
Beispiele:	$f(x) = 2x$	$F(x) = x^2$ / $F(x) = x^2 + 1$ / $F(x) = x^2 + 2$ / ... $F(x) = x^2 - 1$ / $F(x) = x^2 - 2$ / ...
	$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + C$
	$f(x) = x^2$	$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$
	$f(x) = x^3$	$F(x) = \frac{x^4}{4} + C$

Es gibt Funktionen, die keine Stammfunktion haben.
Eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer Stammfunktion ist die Stetigkeit.

74.) Ermitteln Sie zu f mit f(…) jeweils die Stammfunktion F(…)!

a)	$f(x) = 4$	$F(x) =$	
b)	$f(k) = 6k$	$F(k) =$	
c)	$f(m) = -8m$	$F(m) =$	
d)	$f(n) = 4nx - 1$	$F(n) =$	
e)	$f(r) = 6ar^2$	$F(r) =$	
f)	$f(s) = \frac{1}{2} ks^2 + 2$	$F(s) =$	
g)	$f(x) = -6x^2 - 2x - 2$	$F(x) =$	
h)	$f(a) = \frac{1}{3} a^3 - 4a^2 - \frac{1}{2} a$	$F(a) =$	
i)	$f(b) = -3b^3 - 2b^2 - b$	$F(b) =$	
j)	$f(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} x^3 - \frac{1}{4} x^2$	$F(x) =$	
k)	$f(x) = \frac{1}{3} x^4 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} x$	$F(x) =$	

75.) Ermitteln Sie zu f mit f(…) jeweils die Stammfunktion F(…) !

a) $f(x) = \sqrt{x}$	$F(x) =$	
b) $f(x) = \dfrac{n}{\sqrt{x}}$	$F(x) =$	
c) $f(m) = \dfrac{1}{m^2}$	$F(m) =$	
d) $f(n) = \dfrac{x}{n^3}$	$F(n) =$	
e) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$	$F(x) =$	

76.) Ermitteln Sie zu f mit f(…) jeweils die Stammfunktion F(…) !

a) $f(h) = 3h^3 + 3ah^2$	$F(h) =$	
b) $f(k) = \dfrac{2}{k^2} - \dfrac{2}{k^3}$	$F(k) =$	
c) $f(a) = \dfrac{1}{2}a^3 - 2a^2 - a$	$F(a) =$	
d) $f(b) = (b - 2) \cdot (b^2 + 2)$	$F(b) =$	
e) $f(x) = 2k \cdot \sqrt{x}$	$F(x) =$	

7 Die Anwendung des Differenzialrechnens

Mithilfe des Differenzialrechnens lassen sich sog. Extremwertaufgaben lösen, in denen ein Maximum (z. B. maximales Volumen, maximale Belastbarkeit, …) oder ein Minimum (z. B. minimaler Verschleiß, minimaler Materialverbrauch, …) ermittelt werden.

77.) Der Umfang eines Rechtecks beträgt 100 cm.
Wie lang müssen die Seiten des Rechtecks sein, damit ein **maximaler Flächeninhalt** erreicht wird?

①	gegeben:	Umfang des Rechtecks = 100 cm
	gesucht:	Fläche des Rechtecks
②	Zielfunktion:	Fläche = Seite a • Seite b ➔ **Maximum**
③	Definitionsbereich:	$0 < a < 50$
④	Nebenbedingung:	$2a + 2b = 100$ (Umfang) $b = 50 - a$
⑤	NB in Zielfunktion:	$A = a \cdot b$ $A = a \cdot (50 - a)$ $A = f(a) = -a^2 + 50a$
⑥	Ableiten der Zielfunktion:	$A' = f'(a) = -2a + 50$
⑦	Bestimmen des lokalen Extrempunktes:	$0 = -2a + 50$ $2a = 50$ $a = \mathbf{25}$ Lösung Test, ob ein Maximum vorliegt: $A'' = f''(a) = -2$ da $A'' < 0$ ➔ Maximum
⑧	Interpretation der Ergebnisse:	Für eine Seitenlänge von a = 25 cm ergibt sich eine maximale Fläche. Seite a = 25 cm Seite b = 25 cm Fläche = 625 cm²

78.) Der Umfang eines Rechtecks ist zwar nicht bekannt, aber feststehend.
Wie lang müssen die Seiten des Rechtecks sein, damit ein **maximaler Flächeninhalt** erreicht wird?

① gegeben: Umfang des Rechtecks

gesucht: Fläche des Rechtecks

② Zielfunktion: Fläche = Seite a • Seite b ➔ **Maximum**

③ Definitionsbereich: $0 < a < \frac{U}{2}$

④ Nebenbedingung:

$$U = 2a + 2b$$

$$b = \frac{U}{2} - a$$

⑤ NB in Zielfunktion:

$$A = a \cdot b$$

$$A = a \cdot \left(\frac{U}{2} - a \right)$$

$$A = f(a) = \frac{U}{2} a - a^2$$

⑥ Ableiten der Zielfunktion:

$$A' = f'(a) = \frac{U}{2} - 2a$$

⑦ Bestimmen des lokalen Extrempunktes:

$$0 = A' = \frac{U}{2} - 2a$$

$$2a = \frac{U}{2} \qquad | : 2$$

$$a = \frac{U}{4}$$

Test, ob ein Maximum vorliegt:
$A'' = f''(a) = -2$

da $A'' < 0$ ➔ Maximum

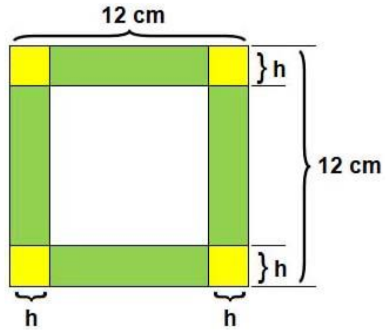
⑧ Interpretation der Ergebnisse:

Für eine Seitenlänge von a = ¼ U ergibt sich eine maximale Fläche.

Seite a = ¼ U
Seite b = ¼ U

Um eine maximale Fläche zu erreichen, sind die Seiten gleich lang zu wählen.
Das Rechteck ist also ein Quadrat.

79.) Aus einem quadratischen Blechstück von 12 cm Seitenlänge werden an den vier Ecken gleich große Quadrate (Seitenlänge h) gestanzt. Die entstehenden Ränder (grüne Fläche) werden nach oben geklappt.
Berechnen Sie die Länge, die Breite, die Höhe und das Volumen des entstehenden Kästchens, wenn dieses ein **maximales Volumen** haben soll!



① gegeben: Seitenlänge des Blechstücks = 12 cm
Seitenlänge des Kästchens = 12 cm – 2h

gesucht: Volumen der Schachtel

② Zielfunktion: Volumen = Länge • Breite • Höhe ➔ **Max.**

③ Definitionsbereich: $0 < h < 6$

④ Nebenbedingung: Seitenlänge = 12 – 2h

⑤ NB in Zielfunktion:

$V = (12 - 2h) \cdot (12 - 2h) \cdot h$
$V = (144 - 48h + 4h^2) \cdot h$
$V = f(h) = 4h^3 - 48h^2 + 144h$

⑥ Ableiten der Zielfunktion: $V' = f'(h) = 12h^2 - 96h + 144 \quad |:12$

⑦ Bestimmen des lokalen Extrempunktes:

$0 = h^2 - 8h + 12$

$h_{1/2} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\frac{64}{4} - 12}$

$= 4 \pm 2$

$h_1 = \mathbf{+6}$ keine Lösung i. S. der Aufgabe

$h_2 = \mathbf{+2}$ Lösung

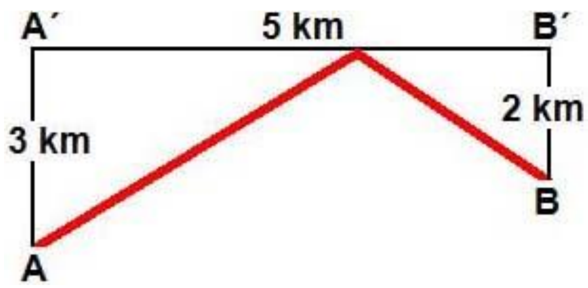
Test, ob ein Maximum vorliegt:

$V'' = f''(h) = 24h - 96$
$V''(+6) = 144 - 96 = +48$ kein Maximum
$V''(+2) = 48 - 96 = -48$ Maximum

⑧ Interpretation der Ergebnisse: Für eine Seitenlänge von h = 2 cm ergibt sich ein maximales Volumen.

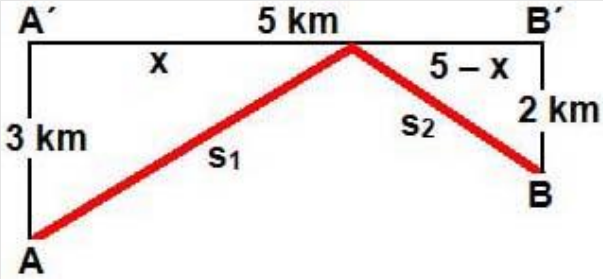
Höhe = 2 cm
Länge = 8 cm
Breite = 8 cm
Volumen = 128 cm^3

80.) Die beiden Orte A und B befinden sich 3 km bzw. 2 km von einer Bahnstrecke entfernt. Der Abstand der beiden Fußpunkte A´ und B´ beträgt 5 km. Berechnen Sie die Lage des Bahnhofs, wenn die **Entfernung** zwischen Bahnhof und A sowie Bahnhof und B **minimal** sein soll!



① geg.: s_1, s_2

ges.: s



② Zielfunktion: $s = s_1 + s_2$ ➔ **Minimum**

③ Definitionsbereich: $0 \le s \le \sqrt{34} + 2$ Hinweis: $\sqrt{34} = \sqrt{3^2 + 5^2}$

$0 \le x \le 5$

④ Nebenbedingungen:

$s_1 = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + 9}$

$s_2 = \sqrt{2^2 + (5 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 29}$

⑤ NB in Zielfunktion:

$s = s_1 + s_2$

$s = f(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{x^2 - 10x + 29}$

⑥ Ableiten der Zielfunktion:

$$s' = \frac{2x}{2 \bullet \sqrt{x^2+9}} + \frac{2x - 10}{2 \bullet \sqrt{x^2 - 10x + 29}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}}$$

⑦ Bestimmen des lokalen Extrempunktes:

$$0 = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}}$$

$$\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{x - 5}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}} \quad | \; (\ldots)^2$$

$$\frac{x^2}{x^2 + 9} = \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 10x + 29}$$

$$x^2 \bullet (x^2 - 10x + 29) = (x^2 + 9) \bullet (x^2 - 10x + 25)$$

$$x^4 - 10x^3 + 29x^2 = x^4 - 10x^3 + 34x^2 - 90x + 225$$

$$29x^2 = 34x^2 - 90x + 225$$

$$0 = 5x^2 - 90x + 225 \quad | :5$$

$$0 = x^2 - 18x + 45$$

$$x_{1/2} = -\frac{-18}{2} \pm \sqrt{\frac{324}{4} - 45}$$

$$= 9 \pm \sqrt{81-45}$$

$$= 9 \pm 6$$

$x_1 = +15$ keine Lösung i. S. der Aufgabe

$x_2 =$ **+3** Lösung

Test, ob ein Minimum vorliegt, mit x''

$$x' = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} + \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}}$$

$u = x$	$u = x - 5$
$u' = 1$	$u' = 1$
$v = \sqrt{x^2+9}$	$v = \sqrt{x^2-10x+29}$
$v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$	$v' = \frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+29}}$

$$x'' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+9} - {}^{x^2}/\sqrt{x^2+9}}{x^2+9} + \frac{\sqrt{x^2-10x+29} - {}^{(x-5)^2}/\sqrt{x^2-10x+29}}{x^2-10x+29}$$

$$x''(3) = \frac{\sqrt{9+9} - {}^{9}/\sqrt{9+9}}{9+9} + \frac{\sqrt{9-30+29} - {}^{4}/\sqrt{9-30+29}}{9-30+29} \quad | \cdot 18 \cdot 8$$

$$= 8\cdot\sqrt{18} - \frac{72}{\sqrt{18}} + 18\cdot\sqrt{8} - \frac{72}{\sqrt{8}}$$

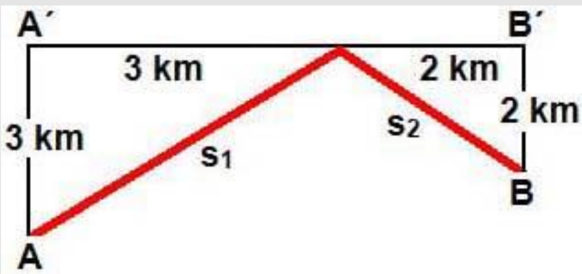
$$= 24\cdot\sqrt{2} - \frac{24}{\sqrt{2}} + 36\cdot\sqrt{2} - \frac{36}{\sqrt{2}}$$

$$= 24\cdot\sqrt{2} - 12\cdot\sqrt{2} + 36\cdot\sqrt{2} - 18\cdot\sqrt{2}$$

Da $x''(3) > 0$ ist, liegt ein Minimum vor!

⑧ Interpretation der Ergebnisse:

Bei $x = 3$ km liegt der Bahnhof.

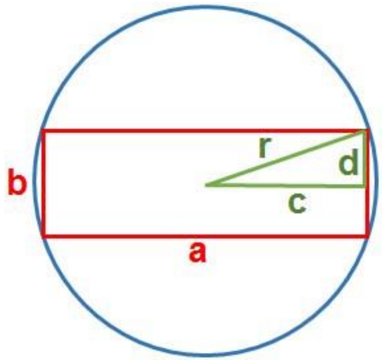


$s_1 = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 4{,}243$ km

$s_2 = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2{,}828$ km

Die minimale Länge der Verbindungsstraßen zwischen den Orten A und B zum Bahnhof beträgt 7,071 km.

81.) Wie lang müssen die Seiten a und b eines Rechtecks sein, das in einem Kreis eingefügt ist, damit ein **maximaler Flächeninhalt** des Rechtecks erreicht wird?



① gegeben: Radius r

gesucht: Fläche A des Rechtecks

② Zielfunktion: Fläche A = Seite a • Seite b ➔ **Maximum**

③ Definitionsbereich: $0 < c \leq 2r$
$0 < d \leq 2r$

④ Nebenbedingung: $r^2 = c^2 + d^2$ Satz des Pythagoras
$\rightarrow \; c^2 = r^2 - d^2$

⑤ NB in Zielfunktion: $A = a \cdot b$

$\frac{1}{4} A = c \cdot d \qquad | \; ()^2$

$\frac{1}{16} A^2 = c^2 \cdot d^2 = (r^2 - d^2) \cdot d^2 \qquad | \cdot 16$

$A^2 = f(d) = 16r^2d^2 - 16d^4$

Um einen Wurzelausdruck $\sqrt{r^2 - d^2}$ zu vermeiden, wird substituiert: $Q(d) = A^2(d)$

⑥ Ableiten der Zielfunktion: $Q' = f'(d) = 32r^2d - 64d^3$

⑦ Bestimmen des lokalen Extrempunktes:

$0 = 32r^2d - 64d^3 \qquad | : (-64)$

$0 = d^3 - \frac{1}{2} r^2 d \qquad \rightarrow d_1 = 0$

$0 = d^2 - \frac{1}{2} r^2$

$d_{2/3} = \pm\sqrt{-(-0{,}5r^2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} r = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} r$

$d_2 = + \frac{\sqrt{2}}{2} r$ Lösung

$d_3 = - \frac{\sqrt{2}}{2} r$ … keine Lösung i. S. der Aufgabe, da d negativ

Test, ob wirklich ein Maximum vorliegt,
mit $Q'' = f''(d) = 32r^2 - 192d^2$

$Q''(\frac{\sqrt{2}}{2} r) = 32r^2 - 192 \cdot \frac{1}{2} r^2$

$= -64r^2$ Maximum

⑧ Interpretation der Ergebnisse:

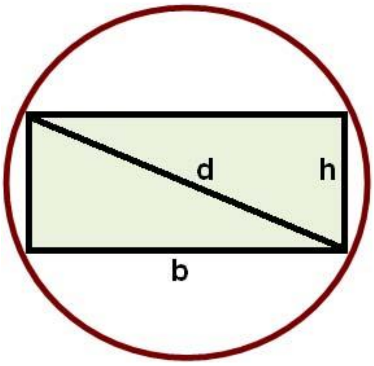
$c^2 = r^2 - d^2 \qquad d = \frac{\sqrt{2}}{2} r$

$c^2 = r^2 - \frac{1}{2} r^2 \qquad \rightarrow \; c = \frac{\sqrt{2}}{2} r$

Einen maximalen Flächeninhalt besitzt das Rechteck, wenn es gleich lange Seite hat, also ein Quadrat ist.

82.) Aus einem Baumstamm mit dem Durchmesser d wird ein Balken mit rechteckigem Querschnitt (Breite b und Höhe h) gesägt.
Berechnen Sie das Verhältnis zwischen Breite und Höhe des Balkens, damit eine **maximale Tragfähigkeit** des Balkens erreicht wird!

Hinweis: Für die Tragfähigkeit T gilt
$T = \varrho \cdot b \cdot h^2$ $\quad \varrho$ … Materialkonstante,
b … Breite,
h … Höhe.



① gegeben: Durchmesser d

gesucht: Breite b und Höhe h

② Zielfunktion: $T = \varrho \cdot b \cdot h^2$ ➔ **Maximum**

③ Definitionsbereich: $b < d$ und $h < d$

④ Nebenbedingung: $d^2 = b^2 + h^2$ Satz des Pythagoras

$\rightarrow \quad h^2 = d^2 - b^2$

⑤ NB in Zielfunktion: $T = \varrho \cdot b \cdot (d^2 - b^2)$

$T = \varrho \cdot d^2 \cdot b - \varrho \cdot b^3$

⑥ Ableiten der Zielfunktion: $T' = f'(b) = \varrho \cdot d^2 - 3 \cdot \varrho \cdot b^2$

⑦ Bestimmen des lokalen Extrempunktes:

$$0 = \varrho \cdot d^2 - 3 \cdot \varrho \cdot b^2$$

$$3 \cdot \varrho \cdot b^2 = \varrho \cdot d^2 \qquad | : 3\varrho$$

$$b^2 = \frac{d^2}{3}$$

$$b = \frac{d}{\sqrt{3}}$$ b … Balkenbreite

Test, ob wirklich ein Maximum vorliegt:
$T'' = f''(b) = -6 \cdot \varrho \cdot b$ da $T'' < 0$, also Max.

⑧ Interpretation der Ergebnisse:

$$h^2 = d^2 - b^2$$

$$h^2 = d^2 - \frac{d^2}{3} = \frac{2}{3} d^2$$

$$h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d$$ h … Balkenhöhe

Verhältnis b : h

$$\frac{b}{h} = \frac{d}{\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{2}\,d}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,d} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wenn die Breite und die Höhe des Balkens im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen, dann besitzt der Balken eine maximale Tragfähigkeit.

83.) Ein Betrieb brachte 2012 ein neues Produkt auf den Markt. Bei einem konstanten Verkaufspreis von 3.000 € und gleichen absatzpolitischen Maßnahmen wurden 2012 (t = 1) 55 Stück, 2013 (t = 2) 150 Stück und 2014 (t = 3) 255 Stück verkauft.
Die Produktlebenskurve für dieses Produkt lässt sich mit der Funktion
$\mathbf{y = f(t) = \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3}$ abbilden.

a) Ermitteln Sie die zu erwartenden Umsätze für die Jahre 2015, 2016 und 2017!

b) Ermitteln Sie das Jahr, in dem es erstmals einen Umsatzrückgang geben wird!

c) Ermitteln Sie das Jahr, in dem der Umsatz auf Null sinkt!

a) $y = f(x) = \alpha_1 \cdot t + \alpha_2 \cdot t^2 + \alpha_3 \cdot t^3$

für 2012 (t = 1) gilt:

$$55 = \alpha_1 \cdot 1^1 + \alpha_2 \cdot 1^2 + \alpha_3 \cdot 1^3$$

$$\text{I} \qquad 55 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

für 2013 (t = 2) gilt:

$$150 = \alpha_1 \cdot 2^1 + \alpha_2 \cdot 2^2 + \alpha_3 \cdot 2^3$$

$$150 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 8\alpha_3 \qquad | : 2$$

$$\text{II} \qquad 75 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3$$

für 2014 (t = 3) gilt:

$$255 = \alpha_1 \cdot 3^1 + \alpha_2 \cdot 3^2 + \alpha_3 \cdot 3^3$$

$$255 = 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 27\alpha_3 \qquad | : 3$$

$$\text{III} \qquad 85 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3$$

II	$75 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3$	III	$85 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3$
I	$\underline{55 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$	I	$\underline{55 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$
II – I	$20 = \alpha_2 + 3\alpha_3$	III – I	$30 = 2\alpha_2 + 8\alpha_3$
IV	$\alpha_2 = 20 - 3\alpha_3$	V	$\alpha_2 = 15 - 4\alpha_3$

IV = V $\qquad 20 - 3\alpha_3 = 15 - 4\alpha_3$

VI $\qquad \alpha_3 = -5$

VI in IV $\qquad \alpha_2 = -3 \cdot (-5) + 20$

VII $\qquad \alpha_2 = 35$

VI und VII in I $\qquad 55 = \alpha_1 + 35 + (-5)$

$\alpha_1 = 55 - 35 - (-5)$

VIII $\qquad \alpha_1 = 25$

$\rightarrow$ die Produktlebenskurve $\mathbf{y = f(x) = 25 \cdot t + 35 \cdot t^2 - 5 \cdot t^3}$

Berechnen des voraussichtlichen Absatzes für 2015:

für 2015 (t = 4) gilt:

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &= 25 \cdot 4 + 35 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4^3 \\
&= 25 \cdot 4 + 35 \cdot 16 - 5 \cdot 64 \\
&= 100 + 560 - 320 \\
y_{2015} &= \mathbf{340\ Stück}
\end{aligned}
$$

Berechnen des voraussichtlichen Umsatzes für 2015:

für 2015 gilt:

$$
\begin{aligned}
\text{Umsatz} &= \text{Preis} \cdot \text{Stück} \\
&= 3.000\ {}^{€}/_{\text{Stück}} \cdot 340\ \text{Stück} \\
\text{Umsatz}_{2015} &= \mathbf{1.020.000\ €}
\end{aligned}
$$

Berechnen des voraussichtlichen Absatzes für 2016:

für 2016 (t = 5) gilt:

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &= 25 \cdot 5 + 35 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5^3 \\
&= 25 \cdot 5 + 35 \cdot 25 - 5 \cdot 125 \\
&= 125 + 875 - 625 \\
y_{2016} &= \mathbf{375\ Stück}
\end{aligned}
$$

Berechnen des voraussichtlichen Umsatzes für 2016:

für 2016 gilt:

$$
\begin{aligned}
\text{Umsatz} &= \text{Preis} \cdot \text{Stück} \\
&= 3.000\ {}^{€}/_{\text{Stück}} \cdot 375\ \text{Stück} \\
\text{Umsatz}_{2016} &= \mathbf{1.125.000\ €}
\end{aligned}
$$

Berechnen des voraussichtlichen Absatzes für 2017:

für 2017 (t = 6) gilt:

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &= 25 \cdot 6 + 35 \cdot 6^2 - 5 \cdot 6^3 \\
&= 25 \cdot 6 + 35 \cdot 36 - 5 \cdot 216 \\
&= 150 + 1.260 - 1.080 \\
y_{2017} &= \mathbf{330\ Stück}
\end{aligned}
$$

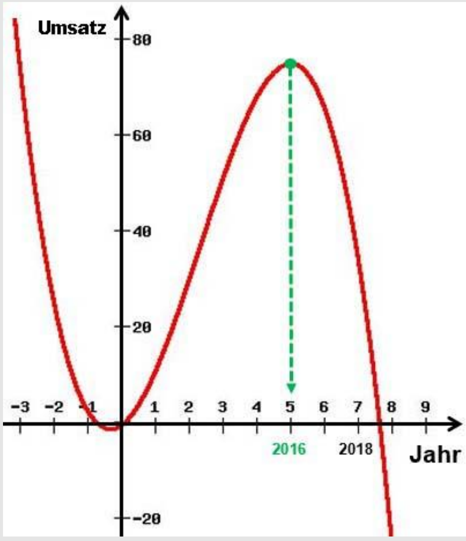
Berechnen des voraussichtlichen Umsatzes für 2017:

für 2017 gilt:

$$
\begin{aligned}
\text{Umsatz} &= \text{Preis} \cdot \text{Stück} \\
&= 3.000\ {}^{€}/_{\text{Stück}} \cdot 330\ \text{Stück} \\
\text{Umsatz}_{2017} &= \mathbf{990.000\ €}
\end{aligned}
$$

b) Bevor der Umsatz rückgängig wird, muss der Umsatz erst einmal stagnieren. Der Wendepunkt zeigt den Zeitpunkt, wenn das Umsatz-wachstum = 0 ist.

$$U = f(t) = P \cdot y(t)$$
$$= 3.000 \cdot (25 \cdot t + 35 \cdot t^2 - 5 \cdot t^3)$$
$$= -15.000 \cdot t^3 + 105.000 \cdot t^2 + 75.000 \cdot t$$
$$U' = f(t) = -45.000 \cdot t^2 + 210.000 \cdot t + 75.000 \quad | : (-45.000)$$



$$0 = t^2 - \frac{14}{3} \cdot t - \frac{5}{3}$$

$$t_{1/2} = -\frac{-14}{6} \pm \sqrt{\frac{14 \cdot 14}{4 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{5}{3}}$$

$$= \frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + \frac{15}{9}}$$

$$= \frac{7}{3} \pm \frac{8}{3}$$

$\mathbf{t_1 = 5}$ → Lösung i. S. der Aufgabe

$t_2 = -\frac{1}{3}$ → keine Lösung i. S. der Aufgabe

Im 5. Jahr stagniert der Umsatz. Nach dem 5. Jahr (also ab 2017) ist mit einem Umsatzrückgang zu rechnen.

c) Die Frage lautet:
Wann zeigt die Produktionslebenskurve den Wert $y = 0$?

$$0 = y(t) = 25 \cdot t + 35 \cdot t^2 - 5 \cdot t^3 \quad | : t$$
$$= 25 + 35 \cdot t - 5 \cdot t^2 \quad | : (-5)$$
$$0 = t^2 - 7 \cdot t - 5$$
$$= -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\frac{(-7)^2}{4} - (-5)}$$
$$= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{20}{4}}$$
$$= \frac{7}{2} \pm \frac{8,3}{2}$$

$\mathbf{t_1 = +7,653}$ → Lösung

$t_2 = -0,653$ → keine Lösung im Sinne der Aufgabe

Das Produkt findet noch 7,653 Jahre (also: bis 2018) Käufer.