

Finanzmathematik

© Dr. Bommhardt. Das Vervielfältigen dieses Arbeitsmaterials zu nicht kommerziellen Zwecken ist gestattet. → www.bommi2000.de

1 Das Tilgungsrechnen

Für Kredite gibt es drei unterschiedliche Tilgungsarten:

- **Festdarlehen** (auch: endfälliges Darlehen):
Der Kreditnehmer zahlt Darlehen am Ende der Laufzeit in einer Summe zurück.
→ mathematisch nur von geringem Interesse
- **Abzahlungsdarlehen** (auch: Ratentilgung):
Die Tilgung erfolgt mit gleich bleibenden Tilgungsraten.
Der Kreditnehmer erbringt jährlich fallende Leistungen (= Zinsen + Tilgungsrate).
- **Annuitätendarlehen** (auch: Tilgungs- oder Amortisationsdarlehen):
→ Annuität ist die Summe aus jährlicher Zins- und Tilgungsleistung.
Der Kreditnehmer erbringt jährlich gleich bleibende Leistungen, die in monatlichen oder vierteljährlichen festen Raten (die so genannte Annuität) gezahlt werden.

1.1 Die Ratentilgung

Der Kreditnehmer erbringt jährlich fallende Leistungen (= Zinsen + Tilgungsrate).
Die Tilgung erfolgt mit gleich bleibenden Tilgungsraten.

- 1.) Ein Unternehmen soll einen Kredit in Höhe von 800.000 Euro in fünf gleich großen Tilgungsraten zurückzahlen. Der Zinssatz beträgt 6,5 % p. a.
Erstellen Sie einen Tilgungsplan!

Wie viel Euro sind insgesamt an Zinsen zu zahlen?

Euro

--	--	--	--	--	--	--	--

Wie hoch ist die zu zahlende Gesamtleistung im 5. Jahr?

Euro

--	--	--	--	--	--	--	--

Jahr	(Rest-) Schuld	Zinsen 6,5 %	Tilgungs- rate	Gesamt- leistung	Rest- schuld
1					
2					
3					
4					
5					

1.2 Die Annuitätentilgung

→ Annuität ist die Summe aus jährlicher Zins- und Tilgungsleistung.

Der Kreditnehmer erbringt jährlich gleich bleibende Leistungen, die in monatlichen oder vierteljährlichen festen Raten (die so genannte Annuität) gezahlt werden.

2.) Ein Unternehmen soll einen Kredit in Höhe von 800.000 Euro in gleich großen Jahresraten zurückzahlen. Der Zinssatz beträgt 6,5 % p. a., der Anfangstilgungssatz beträgt 20 % p. a. (a) und 10 % p. a. (b). Wie hoch ist ...

a) ... die zu zahlende Gesamtleistung im 5. Jahr?

Euro

--	--	--	--	--	--

b) ... die zu zahlende Gesamtleistung im 8. Jahr?

Euro

--	--	--	--	--	--

a)

Jahr	(Rest-) Schuld	Zinsen 6,5 %	Tilgung + gesparte Zinsen	Annuität	Rest- schuld
1					
2					
3					
4					
5					

b)

Jahr	(Rest-) Schuld	Zinsen 6,5 %	Tilgung + gesparte Zinsen	Annuität	Rest- schuld
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

3.) Ein Unternehmen soll einen Kredit in Höhe von 800.000 Euro in gleich großen Jahresraten zurückzahlen. Der Zinssatz beträgt 6,5 % p. a.

a) Wie groß ist die zu zahlende Leistung im 5. Jahr, wenn in den Jahren davor jeweils 200.000 Euro Annuität gezahlt wurden?

Euro

--	--	--	--	--	--	--

%

--	--	--

b) Wie hoch ist die anfängliche Tilgung?

Jahr	(Rest-) Schuld	Zinsen 6,5 %	Tilgung + gesparte Zinsen	Annuität	Rest- schuld
1					
2					
3					
4					
5					

4.) Ein Unternehmen soll einen Kredit in Höhe von einer Million Euro mit gleich bleibender Annuität zurückzahlen. Der Zinssatz beträgt 6 % p. a., die anfängliche Tilgung 1 %. (Anmerkung: Die Zinsen immer auf volle Euro runden.)

Wie viel Euro beträgt die jährliche Annuität?

Wie groß ist die Restschuld nach 4 Jahren?

Wie groß ist die Restschuld nach 7 Jahren?

Wie groß ist die Restschuld nach 10 Jahren?

Euro

--	--	--	--	--	--	--

Euro

--	--	--	--	--	--	--

Euro

--	--	--	--	--	--	--

Euro

--	--	--	--	--	--	--

J.	(Rest-) Schuld	Zinsen 6 %	Tilgung + gesparte Zinsen	Annuität	Rest- schuld
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
:					

- 5.) Ein Unternehmen soll einen Kredit in Höhe von einer Million Euro mit gleich bleibender Annuität zurückzahlen. Der Zinssatz beträgt 6 % p. a., die anfängliche Tilgung 1 %, die Verwaltungskosten 0,25 % vom ursprünglichen Kreditbetrag. (Anmerkung: Die Zinsen immer auf volle Euro runden.)

Wie groß ist die Gesamtzahlungsleistung im 1. Jahr?
 Wie groß ist die Restschuld nach fünf Jahren?

Euro

--	--	--	--	--	--

 Euro

--	--	--	--	--	--

J.	(Rest-) Schuld	Zinsen 6 %	Tilgung + gesparte Zinsen	Annuität	Rest-schuld
1					
2					
3					
4					
5					
:					

- 6.) Ein Hausbauer soll einen Kredit in Höhe von 500.000 Euro mit gleich bleibender Annuität zurückzahlen. Der Zinssatz beträgt 5 % p. a., die anfängliche Tilgung 1 %, die Verwaltungskosten 0,25 % vom ursprünglichen Kreditbetrag. (Anmerkung: Die Zinsen immer auf volle Euro runden.)

Wie viel Euro beträgt die jährliche Annuität?
 Wie groß ist die Gesamtzahlungsleistung im 1. Jahr?
 Wie groß ist die Restschuld nach fünf Jahren?

Euro

--	--	--	--	--	--

 Euro

--	--	--	--	--	--

 Euro

--	--	--	--	--	--

J.	(Rest-) Schuld	Zinsen 5 %	Tilgung + gesparte Zinsen	Annuität	Rest-schuld
1					
2					
3					
4					
5					
:					

7.) Ein Hausbauer will einen Kredit in Höhe von 500.000 Euro in 10 Jahren in gleich großen Tilgungsraten zurückzahlen. Der Zinssatz beträgt 5 % p. a., die Verwaltungskosten 0,25 % vom ursprünglichen Kreditbetrag.
 (Anmerkung: Die Zinsen auf volle Euro runden, Annuitäten auf volle 500 Euro.)

Wie groß ist die jährliche Tilgung?
 Wie groß sind die Verwaltungskosten?
 Wie groß ist die Zahlungsleistung im 1. Jahr?
 Wie groß ist die Restschuld nach fünf Jahren?
 Wie groß ist die Zahlungsleistung im 10. Jahr?
 Wie viel Zinsen wurden insgesamt bezahlt?

%				
Euro				
Euro				
Euro				
Euro				
Euro				

Jahr	(Rest-) Schuld	Zinsen 5 %	Tilgung	Annuität	Rest-schuld
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

2 Das Rentenrechnen

2.1 Das Berechnen des Rentenendwertes

Problem: Es werden in Jahresabständen

(am Anfang des Jahres = pränumerando = vorschüssige Rente;

am Ende des Jahres = postnumerando = nachschüssige Rente)

gleich große Geldbeträge (= Rentenrate) eingezahlt.

1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	...	n. Jahr		
o	o	o		o	vorschüssig	
	o	o	o		o	nachschüssig

Wie groß ist der angesparte Betrag (= Rentenendwert) nach n Jahren?

- 8.) Ein Sparer zahlt jeweils **am Ende des Jahres** bei seiner Bank 1.000 Euro ein. Auf wie viel Euro wächst sein Kapital bis Ende des 5. Jahres bei 4 % Zins an, wenn die letzte Rate Ende des 5. Jahres geleistet wird? Euro

Jahr	1.	2.	3.	4.	5.	
Rate 1	o					4 Jahre verzinst
Rate 2		o				3 Jahre verzinst
Rate 3			o			2 Jahre verzinst
Rate 4				o		ein Jahr verzinst
Rate 5					o	kein Jahr verzinst

nachschüssiger Rentenendwert

<u>Aufzinsung</u>	<u>Endwert der Rentenraten</u>
Rate 1:	
Rate 2:	
Rate 3:	
Rate 4:	
Rate 5:	

- 9.) Ein Sparer zahlt jeweils **am Anfang des Jahres** bei der Bank 1.000 Euro ein. Auf wie viel Euro wächst sein Kapital bis Anfang des 6. Jahres bei 4 % Zins an, wenn die letzte Rate Anfang des 5. Jahres geleistet wird? Euro

Jahr	1.	2.	3.	4.	5.	
<input type="radio"/> Rate 1						5 Jahre verzinst
<input type="radio"/> Rate 2						4 Jahre verzinst
<input type="radio"/> Rate 3						3 Jahre verzinst
<input type="radio"/> Rate 4						2 Jahre verzinst
<input type="radio"/> Rate 5						ein Jahr verzinst

vorschüssiger Rentenendwert

<u>Aufzinsung</u>	<u>Endwert der Rentenraten</u>
Rate 1:	
Rate 2:	
Rate 3:	
Rate 4:	
Rate 5:	

2.2 Das Berechnen des Rentenbarwertes

Problem: Es werden n Jahre lang jedes Jahr

(am Anfang des Jahres = pränumerando = vorschüssige Rente;

am Ende des Jahres = postnumerando = nachschüssige Rente)

gleich große Geldbeträge (= Rentenrate) ausgezahlt.

Wie groß muss der angesparte Geldbetrag (= Rentenbarwert) sein?

- 10.) Über welches Kapital muss ein Sparer verfügen, um fünf Jahre lang jeweils **am Ende des Jahres** eine Rente von 12.000 Euro ausgezahlt zu bekommen?
(Zinssatz = 4 %) Euro

Jahr	1.	2.	3.	4.	5.	
	Rate 1 o					ein Jahr verzinst
		Rate 2 o				2 Jahre verzinst
			Rate 3 o			3 Jahre verzinst
				Rate 4 o		4 Jahre verzinst
					Rate 5 o 5 Jahre verzinst	

nachschüssiger Rentenbarwert

Abzinsung

Barwerte der Rentenraten

Rate 1:

Rate 2:

Rate 3:

Rate 4:

Rate 5:

2.3 Das Ermitteln des Rentenend- und des -barwertes mithilfe von Formeln

nachschüssiger Rentenendwert:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

vorschüssiger Rentenendwert:

$$R_n = r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$q = 1 + \frac{p}{100}$$

nachschüssiger Rentenbarwert:

$$B_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q - 1)}$$

vorschüssiger Rentenbarwert:

$$B_n = r \cdot \frac{1}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{(q - 1)}$$

- 12.) Ein Sparer zahlt jeweils **am Ende des Jahres** bei seiner Bank 1.000 Euro ein. Auf wie viel Euro wächst sein Kapital bei einem Zinssatz von 4 % an, wenn die letzte Rate am Ende des 5. Jahres geleistet wurde? Euro

siehe Tabelle:

	0,5 %	...	4,0 %	...
1	1,0000000		1,0000000	
2	2,0050000		2,0400000	
3	3,0150250		3,2126000	
4	4,0301001		4,2464640	
5	5,0502506		5,4163226	
:	:		:	

13.) Ein Sparer zahlt jeweils **am Ende des Jahres** bei seiner Bank 1.000 Euro ein. Auf wie viel Euro ist jeweils sein Kapital bei einem Zinssatz von 4 % angewachsen, wenn die letzte Rate ...

- ... am Ende des 10. Jahres geleistet wurde?
- ... am Ende des 20. Jahres geleistet wurde?
- ... am Ende des 30. Jahres geleistet wurde?
- ... am Ende des 40. Jahres geleistet wurde?

Euro							
Euro							
Euro							
Euro							

siehe Tabelle:

	0,5 %	...	4,0 %	...
1	1,0000000		1,0000000	
2	2,0050000		2,0400000	
3	3,0150250		3,2126000	
4	4,0301001		4,2464640	
5	5,0502506		5,4163226	
:	:		:	
10	10,2802640		12,0061071	
:	:		:	
20	20,9791154		29,7780786	
:	:		:	
30	32,2800166		56,0849377	
:	:		:	
40	44,1588473		95,0255156	

- 14.) Ein Sparer zahlt jeweils **am Anfang des Jahres** bei der Bank 1.000 Euro ein. Auf wie viel Euro wächst sein Kapital bis Anfang des 6. Jahres bei 4 % Zins an, wenn die letzte Rate Anfang des 5. Jahres geleistet wird? Euro

siehe Tabelle:

	0,5 %	...	4,0 %	...
1	1,0000000		1,0000000	
2	2,0050000		2,0400000	
3	3,0150250		3,2126000	
4	4,0301001		4,2464640	
5	5,0502506		5,4163226	
:	:		:	

- 15.) Ein Sparer zahlt jeweils **am Anfang des Jahres** bei der Bank 1.000 Euro ein. Auf wieviel Euro ist jeweils sein Kapital bei einem Zinssatz von 4 % angewachsen, wenn die letzte Rate ...
- ... am Anfang des 10. Jahres geleistet wurde? Euro
- ... am Anfang des 20. Jahres geleistet wurde? Euro
- ... am Anfang des 30. Jahres geleistet wurde? Euro
- ... am Anfang des 40. Jahres geleistet wurde? Euro

siehe Tabelle:

	0,5 %	...	4,0 %	...
1	1,0000000		1,0000000	
2	2,0050000		2,0400000	
3	3,0150250		3,2126000	
4	4,0301001		4,2464640	
5	5,0502506		5,4163226	
:	:		:	
10	10,2802640		12,0061071	
:	:		:	
20	20,9791154		29,7780786	
:	:		:	
30	32,2800166		56,0849377	
:	:		:	
40	44,1588473		95,0255156	

16.) Über welches Kapital muss ein Sparer verfügen, um fünf Jahre lang jeweils **am Ende des Jahres** eine Rente von 12.000 Euro ausgezahlt zu bekommen?
 (Zinssatz = 4 %) Euro

Lösungsweg mit Formel:

Lösungsweg mit Tabelle:

siehe Tabelle:

	0,5 %	...	4,0 %	...
1	0,9900990		0,9615385	
2	1,9703951		1,8860947	
3	2,9409852		2,7750910	
4	3,9019656		3,6298952	
5	4,8534312		4,4518223	
:	:		:	

17.) Über welches Kapital muss ein Sparer verfügen, um ...

- ... 10 Jahre lang
- ... 20 Jahre lang
- ... 30 Jahre lang
- ... 40 Jahre lang

Euro							
Euro							
Euro							
Euro							

jeweils **am Ende des Jahres** eine Rente von 12.000 Euro ausgezahlt zu bekommen? (Zinssatz 4 %)

siehe Tabelle:

	0,5 %	...	4,0 %	...
1	0,9900990		0,9615385	
2	1,9703951		1,8860947	
3	2,9409852		2,7750910	
4	3,9019656		3,6298952	
5	4,8534312		4,4518223	
:	:		:	
10	9,7303119		8,1108958	
:	:		:	
20	18,9873192		13,5903263	
:	:		:	
30	27,7940540		17,2920333	
:	:		:	
40	36,1722279		19,7927739	

18.) Über welches Kapital muss ein Sparer verfügen, um fünf Jahre lang jeweils **am Anfang des Jahres** eine Rente von 12.000 Euro ausgezahlt zu bekommen?

(Zinssatz = 4 %)

Euro

Lösungsweg mit Formel:

Lösungsweg mit Tabelle:

siehe Tabelle:

	0,5 %	...	4,0 %	...
1	0,9900990		0,9615385	
2	1,9703951		1,8860947	
3	2,9409852		2,7750910	
4	3,9019656		3,6298952	
5	4,8534312		4,4518223	
:	:		:	

19.) Über welches Kapital muss ein Sparer verfügen, um ...

- ... 10 Jahre lang
- ... 20 Jahre lang
- ... 30 Jahre lang
- ... 40 Jahre lang

Euro							
Euro							
Euro							
Euro							

jeweils **am Anfang des Jahres** eine Rente von 12.000 Euro ausgezahlt zu bekommen? (Zinssatz = 4 %)

siehe Tabelle:

	0,5 %	...	4,0 %	...
1	0,9900990		0,9615385	
2	1,9703951		1,8860947	
3	2,9409852		2,7750910	
4	3,9019656		3,6298952	
5	4,8534312		4,4518223	
:	:		:	
9	8,7790639		7,4353316	
:	:		:	
19	18,0823563		13,1339394	
:	:		:	
29	26,9330243		16,9837146	
:	:		:	
39	35,3530890		19,5844848	