Die Funktionen

1 Der Funktionsbegriff

Wird jedem Element aus der Menge M
durch irgend eine Vorschrift
<u>genau ein Element</u> aus der Menge N
zugeordnet,
so nennt man diese Zuordnung eine **Funktion**.

Menge M		Menge N
1	→	2
2	→	4
3	→	6
4	→	8
5	→	10

Es können die Zahlenpaare (**Tupel**) (1 ; 2) , (2 ; 4) , (3 ; 6) , (4 ; 8) und (5 ; 10) gebildet werden.

Zu einer Funktion gehören ...

... der Definitionsbereich: = Menge aller Elemente, denen andere Elemente zugeordnet werden.

... der Wertevorrat: = Menge aller Elemente, die den Elementen des Definitionsbereiches zugeordnet werden.

... die Vorschrift: = Regel, nach der die Elemente des Wertevorrats den Elementen des Definitionsbereichs zugeordnet werden.

... die Eindeutigkeit: = Jedem Element aus dem Definitionsbereich wird ***<u>genau</u>*** ein Element aus dem Wertevorrat zugeordnet.

Wird wenigstens einem Element aus der Menge M
durch irgend eine Vorschrift
<u>wenigstens ein Element</u> aus der Menge N
zugeordnet,
so nennt man diese Zuordnung eine **Relation**.

Menge M		Menge N
1	→	2
	↘	4
3	→	6
	↗	8
5	→	10

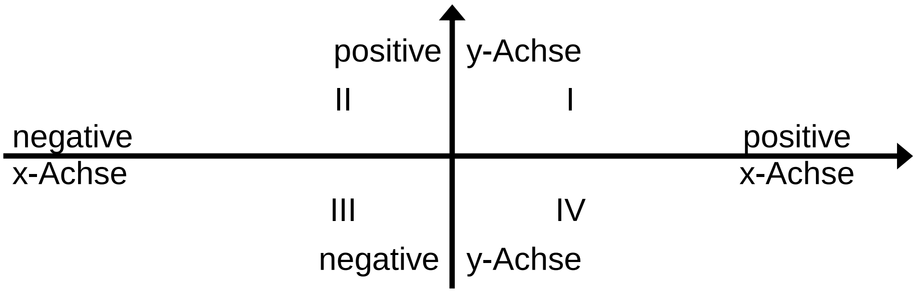
Es können die Zahlenpaare (**Tupel**) (1 ; 2) , (1 ; 4) , (3 ; 6) , (5 ; 8) und (5 ; 10) gebildet werden.

Die Menge aller Punkte/Tupel, die nach einer bestimmten Vorschrift gebildet werden, heißt **Graph** der Funktion/Relation.

Ein Graph wird in ein Koordinatensystem gezeichnet, das aus zwei sich senkrecht schneidenden Achsen besteht. Der Schnittpunkt dieser Achsen heißt **Koordinatenursprung**.

Die waagerechte Achse (auch: x-Achse, Abszisse) heißt Achse der unabhängigen Variablen, die senkrechte Achse (auch: y-Achse, Ordinate) heißt Achse der abhängigen Variablen.

Alle in dieses Koordinatensystem eingezeichneten Punkte/Tupel haben zwei Koordinaten (x ; y).



1.) In welchen Quadranten (I, II, III oder IV) liegen jeweils die folgenden Punkte?

(2 ; 5)		(2 ; –5)		(–2 ; 5)		(–2 ; –5)	
(0 ; 0)		(–5 ; –2)		(–5 ; 5)		(2 ; –22)	

2.) Gegeben ist die Vorschrift **y = 2x – 1**

Ermitteln Sie für den Definitionsbereich **–5** ≤ **x** ≤ **5** alle zu dieser Vorschrift gehörenden Punkte/Tupel und tragen Sie diese in das Koordinatensystem ein!

Wertetabelle:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y = 2x – 1											

2 Die linearen Funktionen

Die Funktion $y = f(x) = ax + b$ ist eine Funktion 1. Ordnung (auch: lineare Funktion), weil die unabhängige Variable x in der ersten Potenz auftritt.

Der Graph einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.

Es sind mindestens zwei Punkte erforderlich, um eine Gerade eindeutig zu bestimmen.

3.) Gegeben sind die Vorschriften $\mathbf{y = 2x - 1}$ und $\mathbf{y = -x + 2}$
Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch den Schnittpunkt der beiden Geraden!

4.) Ermitteln Sie im Intervall [–5 ; 5] für die folgenden Vorschriften / Funktionen 1. Ordnung / linearen Funktionen die zugehörigen Punkte und zeichnen Sie die entsprechenden Graphen in ein Koordinatensystem!

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y = 3x – 1											
y = ½ x + 2											
y = x											
y = – x											
y = 3											

5.) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion **x = –3** in ein Koordinatensystem!

Für lineare Funktionen sind folgende Bezeichnungen üblich:

y = mx + n … Normalform der Geraden

0 = ax + by + c … allgemeine Form der Geraden

6.) Gegeben sind die drei folgenden linearen Funktionen. Untersuchen Sie, ob die Punkte A, B, C, D, E und F jeweils auf den durch die Funktionen repräsentierten Geraden liegen!

	A (0 ; 0)	B (4 ; 4)	C (3 ; 2)	D (2 ; 0)	E (5 ; 0)	F (5 ; 1)
$y = 2x - 4$						
$y = -x + 5$						
$y = -\frac{1}{2}x + 3{,}5$						

7.) Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte A (1 ; 5) und B (–2 ; –1) !

8.) Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte A (–3 ; 3) und B (3 ; 1) !

9.) Ein Autoverleih fordert für jedes ausgeliehene Auto eine Grundgebühr von 50 € sowie für jeden gefahrenen Kilometer 0,80 €. Ermitteln Sie rechnerisch und grafisch, wie viel bei 100 km, 200 km und 300 km zu bezahlen ist!

10.) Für eine Taxifahrt sind 3,00 € Grundgebühr sowie 1,25 € für jeden beförderten Kilometer zu bezahlen. Ermitteln Sie rechnerisch und zeichnerisch die jeweiligen Preise für eine Fahrt über 7 km, über 12 km sowie über 22 km!

11.) Die Spedition A berechnet 100 € Grundgebühr und 100 € je Stunde, die Spedition B 200 € Grundgebühr und 50 € je Stunde, die Spedition C 300 € Grundgebühr und 25 € je Stunde. Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch, welche Spedition ab wieviel Stunden jeweils die preisgünstigste ist!

12.) Für die Vervielfältigung einer Broschüre gelten folgende Angebote:

Druckerei A:	150 Euro Fixkosten	sowie	0,03 Euro je Seite
Druckerei B:	20 Euro Fixkosten	sowie	0,40 Euro je Seite
Druckerei C:	80 Euro Fixkosten	sowie	0,10 Euro je Seite

Ermitteln Sie zeichnerisch und rechnerisch, welche Druckerei ab wie viel Seiten jeweils die preisgünstigste ist!

13.) Der Verkauf einer Ware bringt einen Erlös von 3 Euro je Stück. Die Herstellung verlangt 10 Euro an fixen Kosten und 2 Euro an variablen Kosten.

Ab wie viel Stück wird Gewinn erzielt?

14.) Zeichnen Sie die gemeinsamen Lösungsbereiche für folgende Bedingungen!

a) $x > 0$, $y > 0$, $y < \frac{1}{2} x$

b) $x > 0$, $y > 0$, $x < 5$, $y < 6$, $y < 3 - x$

c) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x < 6$, $y < 6$, $y < x - 3$

15.) Für ein Restaurant wurden zwei Sorten Kaffee eingekauft: 20 kg der Sorte A zu 6 Euro je kg und 15 kg der Sorte B zu 7 Euro je kg. Das Restaurant kann den Kaffee entweder sortenrein zu 2,00 Euro (Sorte A) und zu 2,50 Euro (Sorte B) je Tasse (Eine Tasse enthält 6,25 g Kaffee.) oder als Mischung zu 2,25 Euro je Tasse verkaufen. Wie viel Euro Gewinn erbringt die für das Restaurant wirtschaftlichere Variante?

16.) Augustin und Max fahren mit dem Rad von Dresden nach Paris. Augustin fährt ein Tourenrad und schafft am Tag 25 km. Max fährt ein Rennrad und schafft täglich 50 km. Deshalb fährt Augustin mit dem Tourenrad 4 Tage eher los als sein Bruder. Am wievielten Tag nach Augustins Start holt ihn Max ein?

17.) Wo schneidet die Funktion **$y = -4x + 3$** jeweils die x- und die y-Achse!

3 Die quadratischen Funktionen

Die Funktion **$y = f(x) = ax^2 + bx + c$** ist eine Funktion 2. Ordnung (auch: quadratische Funktion), weil die unabhängige Variable x in der zweiten Potenz auftritt.

Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine **Parabel**.

Es sind mindestens drei Punkte erforderlich, um eine Parabel eindeutig zu bestimmen.

18.) Wie heißt die Gleichung der Parabel durch die Punkte P_1 (–1 ; 1), P_2 (0 ; –2) und P_3 (3 ; 1)?

19.) Wie heißt die Gleichung der Parabel durch die Punkte P_1 (1 ; 3), P_2 (0 ; 8) und P_3 (4 ; 0)?

20.) Wie heißt die Gleichung der Parabel durch die Punkte P_1 (–2 ; 3), P_2 (1 ; 4) und P_3 (6 ; –1)?

21.) Zeichnen Sie jeweils den Verlauf der Parabel!

$$y = x^2$$

$$y = -x^2$$

22.) Zeichnen Sie jeweils den Verlauf der Parabel!

$$y = x^2 - 4$$

$$y = -x^2 + 2$$

23.) Zeichnen Sie jeweils den Verlauf der Parabel!

$$y = x^2 - 2x + 1 \qquad y = (x - 1)^2$$

24.) Zeichnen Sie jeweils den Verlauf der Parabel!

$y = x^2 - 4x + 4$ $\qquad$ $y = (x - 2)^2$

25.) Zeichnen Sie jeweils den Verlauf der Parabel!

$y = (x + 2)^2$ $\qquad$ $y = (x + 2)^2 - 1$

26.) Zeichnen Sie jeweils den Verlauf der Parabel!

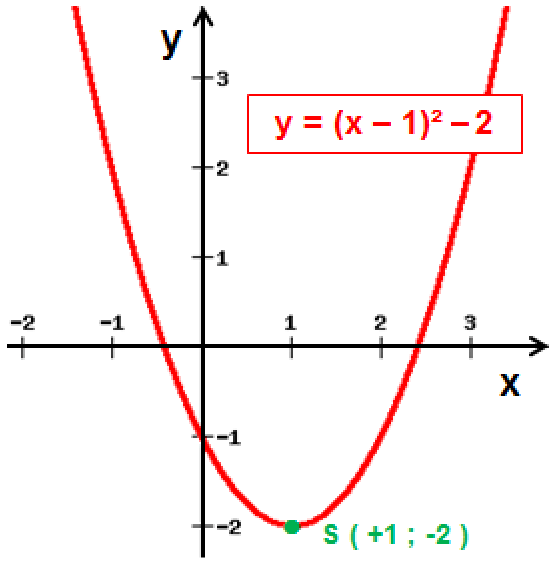
$y = (x - 1)^2 - 2$

$y = -(x - 3)^2 + 2$

Ermitteln der Scheitelgleichung der Parabel

Die Gleichung in der Form **$y = (x - 1)^2 - 2$** beruht auf der Scheitelgleichung

$$y = a \bullet (x - x_S)^2 + y_S$$



Der tiefste Punkt der Parabel ist der Scheitelpunkt S (+1 ; –2) .

Die Scheitelgleichung gibt die Verschiebung der Normalparabel $y = x^2$ auf der x- und der y-Achse an.

Nach Ausmultiplizieren des Klammerausdrucks ergibt sich für die Parabel die allgemeine Form der Gleichung $y = x^2 - 2x - 1$

Der vor dem x^2 stehende Faktor a gibt die Streckung (für $a > 1$) oder die Stauchung (für $a < 1$) der Parabel an.

Es gibt drei Möglichkeiten, um aus der allgemeinen Form einer Gleichung die Scheitelform dieser Gleichung zu ermitteln: mithilfe der quadratischen Ergänzung oder mithilfe von Formeln oder mithilfe der Nullstellen.

quadratische Ergänzung:
für a = 1

$$\mathbf{y = x^2 + bx + \boxed{c}}$$

$$y = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + 2 \bullet x \bullet \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4}$$

$$= x^2 + bx + \boxed{\frac{b^2}{4}}$$

quadratische Ergänzung

mithilfe von Formeln:

Für die allgemeine Form der quadratischen Funktion **$y = ax^2 + bx + c$** ergeben sich die Koordinaten für den Scheitelpunkt S (x_S ; y_S) wie folgt

für a = beliebig gilt:
(**$y = ax^2 + bx + c$**)

$$\boxed{S\left(-\frac{b}{2a} \; ; \; \frac{4ac - b^2}{4a}\right)}$$

für a = +1 gilt:
(**$y = x^2 + bx + c$**)

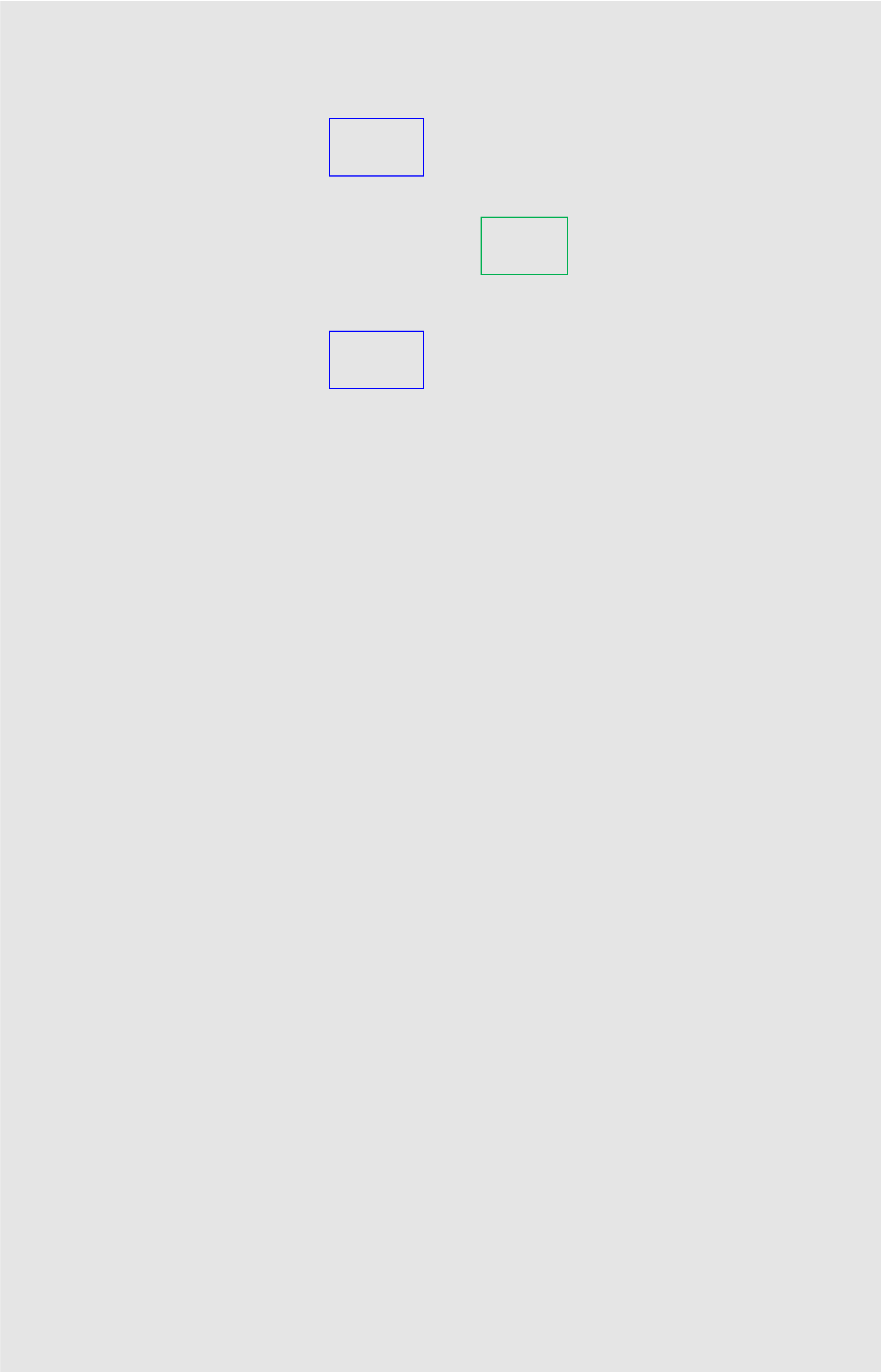
$$\boxed{S\left(-\frac{b}{2} \; ; \; c - \frac{b^2}{4}\right)}$$

27.) Ermitteln Sie den Scheitelpunkt der Parabel **$y = x^2 + 2x + 3$**

28.) Ermitteln Sie den Scheitelpunkt der Parabel **$y = x^2 + 6x - 3$**

29.) Ermitteln Sie den Scheitelpunkt der Parabel **$y = -x^2 - 4x - 2$**

30.) Errechnen Sie die allgemeine Gleichung, die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Parabel, die durch die Punkte $P_1\ (-7\ ;\ 3)$, $P_2\ (-2\ ;\ -2)$ und $P_3\ (1\ ;\ -1)$ geht!



31.) Ermitteln Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Parabel $\mathbf{y = x^2 - x - 6}$

32.) Wie heißen die Gleichungen (Normalform) der beiden Parabeln mit dem Streckungsfaktor 1, die die x-Achse bei (0 ; 0) und (4 ; 0) schneiden?

33.) Wie heißen die Gleichungen (Normalform) der beiden beiden Parabeln mit dem Streckungsfaktor 1, die die x-Achse bei (–2 ; 0) und (0 ; 0) schneiden?

34.) Wie heißt die Gleichung der Parabel (Normalform) mit dem Streckungsfaktor $a = 2$ und den Nullstellen $x_1 = -1$ sowie $x_2 = 7$?

35.) Wo schneidet die Parabel mit dem Streckungsfaktor $a = 2$ und dem Scheitel $S(4; -8)$ die x-Achse?

36.) Ermitteln Sie die Nullstellen der Parabel mit dem Scheitel $S(3; -2)$ und dem Stauchungsfaktor $a = \frac{1}{2}$!

37.) Ermitteln Sie die Nullstellen der nach unten geöffneten Parabel mit dem Streckungsfaktor 1 und dem Scheitelpunkt S (1 ; 4) !

38.) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Parabeln **$y = x^2$** und **$y = -x^2 + 2$** !

39.) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der beiden Parabeln **$y = x^2 + 2x - 5$** und **$y = x^2 - 4x + 1$** !
Ermitteln Sie die beiden Scheitelgleichungen! Wie lauten beide Scheitelpunkte?

40.) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln **$y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - x - 3{,}5$** und **$y = -x^2 - 4x + 1$** !

Wie lauten beide Scheitelgleichungen? Ermitteln Sie die beiden Scheitelpunkte!

41.) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der beiden Parabeln **$y = -x^2 + 2x - 1$** und **$y = x^2 + 2x - 1$** !

Ermitteln Sie die beiden Scheitelgleichungen! Wie lauten beide Scheitelpunkte?

–

42.) Ermitteln Sie die allgemeine Form der Gleichung und die Nullstellen der Parabel mit dem Scheitelpunkt **S (4 ; –18)** und dem Streckungsfaktor **a = 2** !

43.) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der beiden Parabeln **$y = x^2 + 2x - 1$** und **$y = -x^2 - 2x - 1$** !

Ermitteln Sie die beiden Scheitelgleichungen! Wie lauten beide Scheitelpunkte?

44.) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der beiden Parabeln **$y = x^2 + 2x + 1$** und **$y = -x^2 + 2x - 1$** !

Ermitteln Sie die beiden Scheitelgleichungen! Wie lauten beide Scheitelpunkte?

45.) Zerlegen Sie die Zähler und Nenner der folgenden Brüche in Faktoren und kürzen Sie die Brüche!

a)	$\frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 5x + 4}$	
b)	$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$	
c)	$\frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + 7x + 12}$	
d)	$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$	
e)	$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$	
f)	$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$	
g)	$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$	
h)	$\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + x - 6}$	
i)	$\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 6x + 9}$	
j)	$\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4}$	
k)	$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 5x + 4}$	
l)	$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$	
m)	$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$	
n)	$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x - 2}$	
o)	$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$	
p)	$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 6x + 8}$	
q)	$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$	
r)	$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$	
s)	$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 2x - 8}$	

4 Die Winkelfunktionen

4.1 Die Begriffe Ankathete, Gegenkathete und Hypotenuse

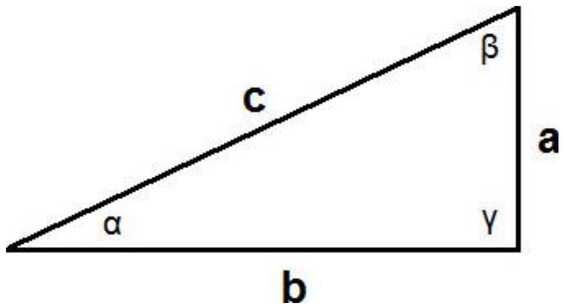
Mithilfe der Winkelfunktionen (auch: trigonometrische Funktionen) lassen sich Winkel und Seiten im rechtwinkligen Dreieck berechnen und periodische Vorgänge in den Naturwissenschaften beschreiben.

Im rechtwinkligen Dreieck gelten:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

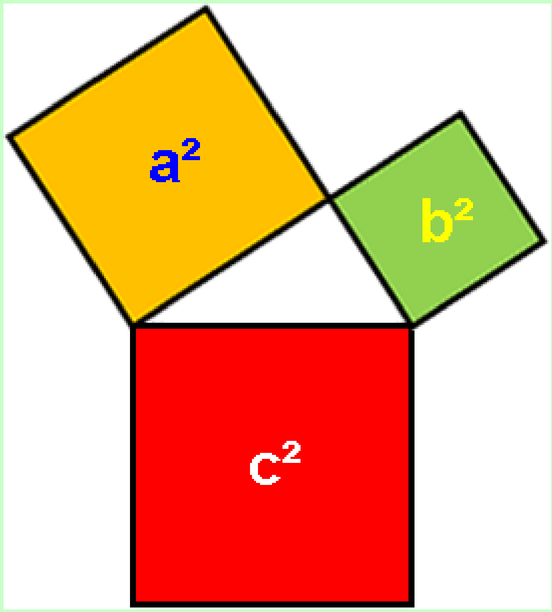
$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 90°}$$

a … Gegenkathete
b … Ankathete
c … Hypotenuse



Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Die wichtigsten Winkelfunktionen sind

Sinus
(Abkürzung: sin)

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\sin(\beta) = \frac{\text{Gegenkathete von } \beta}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

Kosinus
(auch: Cosinus,
Abkürzung: cos)

$\cos(\alpha)$	=	$\frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$	=	$\frac{b}{c}$
$\cos(\beta)$	=	$\frac{\text{Ankathete von } \beta}{\text{Hypotenuse}}$	=	$\frac{a}{c}$

Tangens
(Abkürzung: tan)

$\tan(\alpha)$	=	$\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$	=	$\frac{a}{b}$
$\tan(\alpha)$	=	$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	=	$\frac{a}{b}$
$\tan(\beta)$	=	$\frac{\text{Gegenkathete von } \beta}{\text{Ankathete von } \beta}$	=	$\frac{b}{a}$

Weitere – allerdings weniger häufig benutzte – Winkelfunktionen sind

Kotangens
(auch: Cotangens,
Abkürzung: cot)

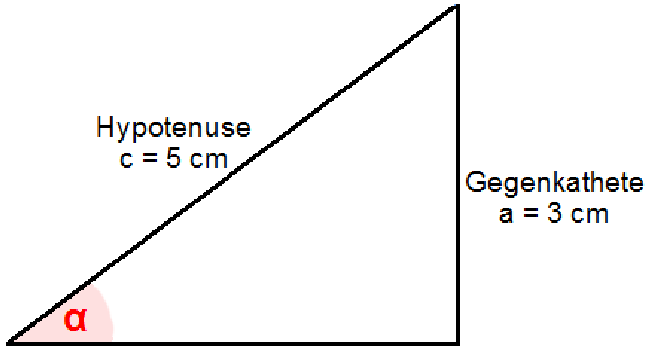
$\cot(\alpha)$	=	$\frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Gegenkathete von } \alpha}$	=	$\frac{b}{a}$
$\cot(\beta)$	=	$\frac{\text{Ankathete von } \beta}{\text{Gegenkathete von } \beta}$	=	$\frac{a}{b}$

Kosekans (= Kehrwert von Sinus, Abkürzung: csc),
Sekans (= Kehrwert von Kosinus, Abkürzung: sec),
Sinus versus (auch: Versinus oder Versus),
Kosinus versus (auch: Koversinus oder Coversin),
Exsekans (auch: Exsecant oder Exsec) und
Exkosekans (auch: Exsecant oder Excsc).

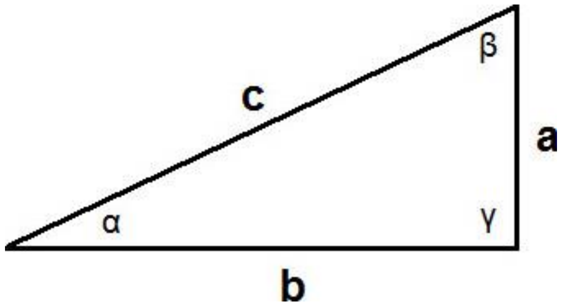
Die Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens lassen wie folgt umrechnen:

	Sinus	Kosinus	Tangens
Sinus		$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - cos^2(\alpha)}$	$\sin(\alpha) = \frac{\tan(\alpha)}{\sqrt{1 - tan^2(\alpha)}}$
Kosinus	$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - sin^2(\alpha)}$		$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - tan^2(\alpha)}}$
Tangens	$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\sqrt{1 - sin^2(\alpha)}}$	$\tan(\alpha) = \frac{\sqrt{1 - cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$	

46.) Wie groß ist der Winkel α eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Gegenkathete 3 cm und dessen Hypotenuse 5 cm lang ist?



47.) Gegeben ist das nebenstehende rechtwinklige Dreieck mit den drei Seiten a, b und c sowie den Innenwinkeln α, β und γ (90°). Berechnen Sie für die folgenden zehn Beispiele die jeweils fehlenden Angaben!

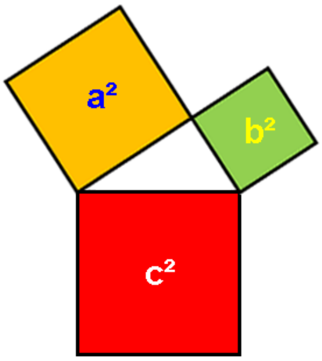


	Seite a	Seite b	Seite c	Winkel α	Winkel β
①	3 cm	4 cm			
②		5 cm	6 cm		
③			10 cm	30°	
④	2 cm				40°
⑤		3 cm		45°	
⑥	5 cm		7 cm		
⑦	4 cm	5 cm			
⑧	1 cm			60°	
⑨		2 cm			30°
⑩			3 cm		20°

48.) Beweisen Sie die Aussage

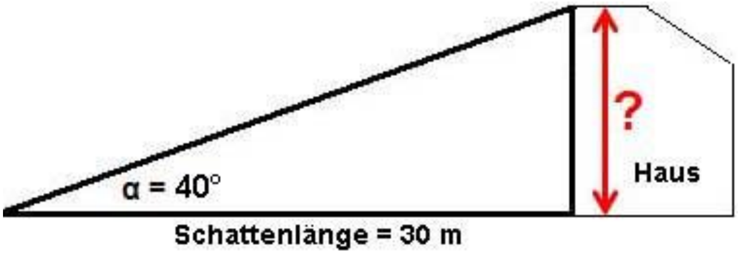
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

mithilfe des Satzes des Pythagoras!



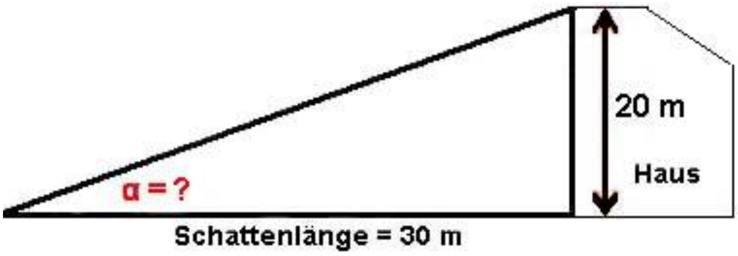
49.) Ein Haus wirft einen 30 m langen Schatten. Die Sonnenstrahlen treffen in einem Winkel von 40° auf die Straße.

Wie hoch ist das Haus?

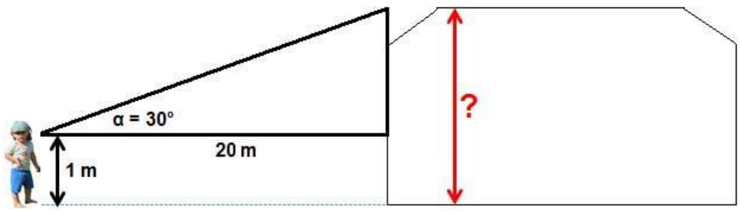


50.) Ein 20 m hohes Haus wirft einen 30 m langen Schatten.

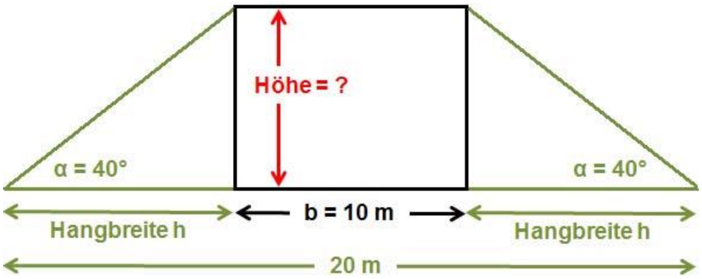
Wie groß ist der Winkel, unter dem die Sonnenstrahlen auf die Straße treffen?



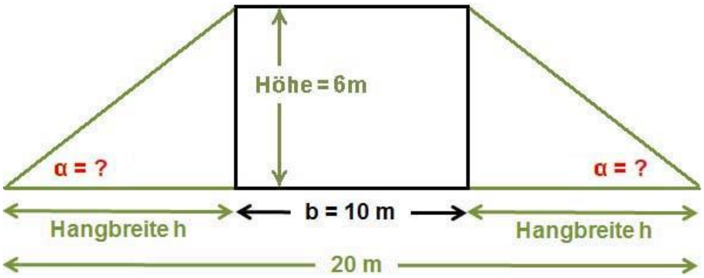
51.) Ein Kind (Augenhöhe 1 m) sieht in 20 m Entfernung ein Haus und dessen Dachspitze in einem Winkel von 30°.
Wie hoch ist dieses Haus?



52.) Zum Schutz vor Hochwasser soll für 200.000 Euro ein zwei Kilometer langer Damm in Trapezform errichtet werden. Berechnen Sie die Höhe des Dammes!



53.) Zum Schutz vor Hochwasser soll ein 2 km langer und 6 m hoher Damm in Trapezform errichtet werden. Berechnen Sie den Winkel des Dammhanges!



54.) Der Schiefe Turm von Pisa ist 55,8 m hoch und neigt sich um 3,9 m.

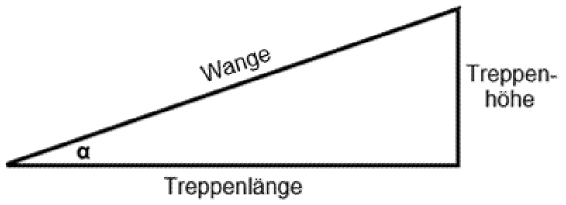
Die Oberkirche „Unser Lieben Frauen am Berge“ in Frankenhausen (Thüringen) ist 56 m hoch und neigt sich um 4,22 m.

Berechnen Sie die beiden Neigungswinkel!

55.) Um wie viele Meter würde sich der Schiefe Turm von Pisa neigen, wenn er den gleichen Neigungswinkel wie die Oberkirche in Frankenhausen besäße?

Witz: **Frage: Was sagte der Baumeister bei Baubeginn des Turms von Pisa?**
Antwort: „Wird schon schief gehen …“

56.) Gemäß DIN 18065 darf die Treppensteigung zwischen 14 und 20 cm betragen. Die Treppenwange ist ein „Bauteil, das die Stufen seitlich trägt und den Lauf meistens auch seitlich begrenzt“.



a) Berechnen Sie den Steigungswinkel α der Treppenwange bei einer Treppenhöhe von 3 m und 5 m Treppenlänge!

b) Berechnen Sie die Länge der Treppe bei einem Steigungswinkel von 25° und einer Treppenhöhe von 3 m!

c) Berechnen Sie die Länge der Wange bei einem Steigungswinkel von 30° und einer Treppenhöhe von 3 m!

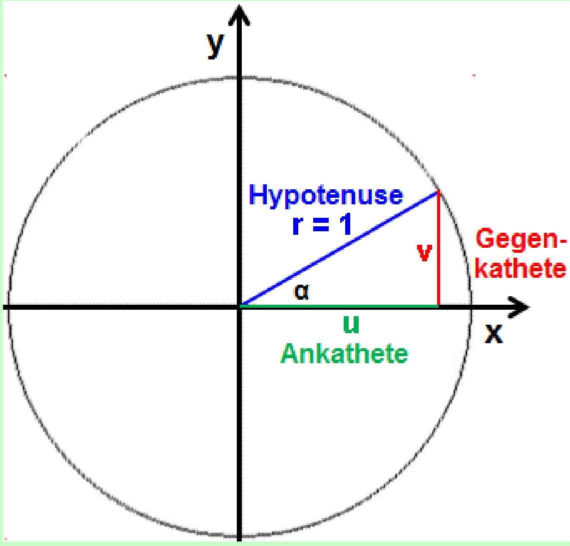
4.2 Die Begriffe Bogenmaß und Gradmaß

Als Einheitskreis wird ein Kreis (360°) mit einem Radius von 1 bezeichnet.

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = v$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = u$$

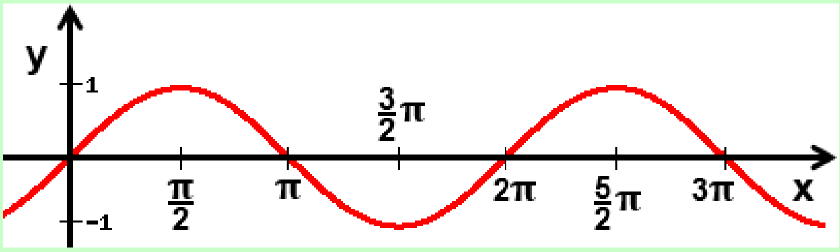
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{v}{u}$$



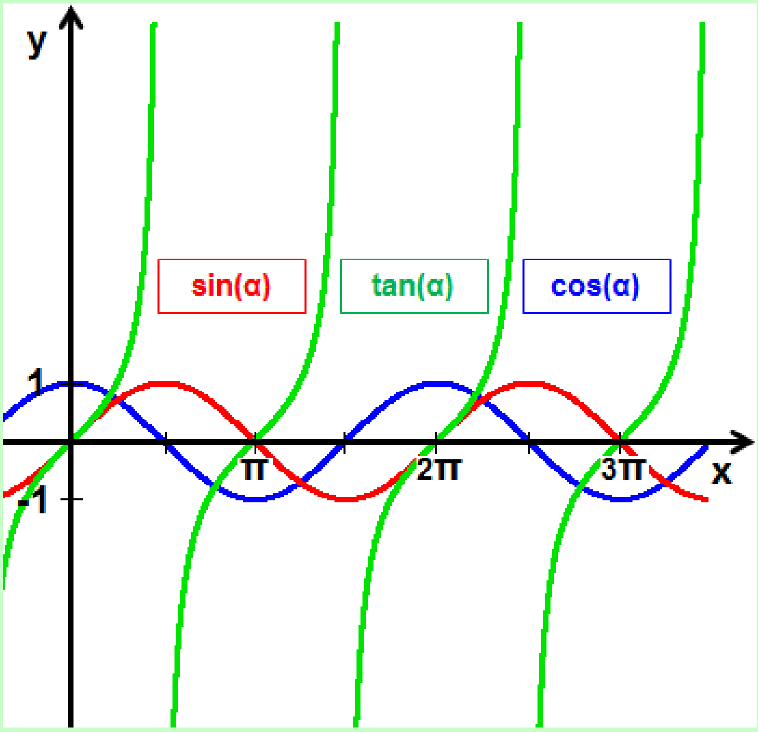
Neben dem Gradmaß wird bei Winkelmessungen auch die Angabe im Bogenmaß genutzt. Der Vollwinkel (360°) entspricht dabei 2 Π (etwa 6,28).

Für den Winkel α = 0° ist v = 0.

Für den Winkel α = 90° (Bogenmaß ½π) ist v = 1.



Die Winkelfunktionen sin(α), cos(α) und tan(α) sind periodische Funktionen.
D. h., sin(α) und cos(α) liefern im Abstand von 2π (360°) die gleichen Funktionswerte, tan(α) sogar im Abstand von π (180°).



57.) Geben Sie für folgende Winkel jeweils das Bogenmaß und die fehlenden Werte für sin(α), cos(α) und tan(α) an!

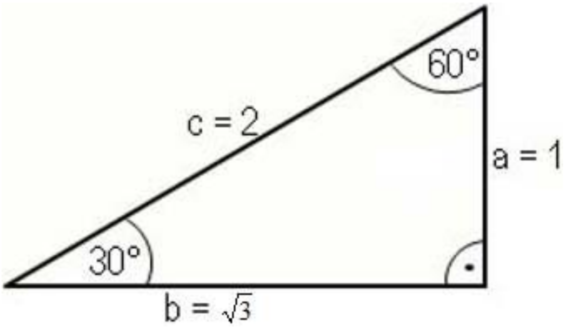
Winkel	Bogenmaß	sin(α)	cos(α)	tan(α)
0°				
30°				
45°				
60°				
90°				
120°				
135°				
150°				
180°				
270°				
360°				
450°				
540°				
630°				
720°				

58.) Geben Sie für die Winkelfunktion sin(α) den Definitionsbereich, den Wertebereich und die Nullstellen an!

59.) Geben Sie für die Winkelfunktion cos(α) den Definitionsbereich, den Wertebereich und die Nullstellen an!

60.) Geben Sie für die Winkelfunktion $\tan(\alpha)$ den Definitionsbereich, den Wertebereich und die Nullstellen an!

61.) Geben Sie die Werte für $\sin(30°)$, $\sin(60°)$, $\cos(30°)$, $\cos(60°)$, $\tan(30°)$ und $\tan(60°)$ an!



$\sin(30°)$ =

$\cos(30°)$ =

$\tan(30°)$ =

$\sin(60°)$ =

$\cos(60°)$ =

$\tan(60°)$ =

62.) Ermitteln Sie mithilfe eines Taschenrechners für die folgenden Winkel jeweils die Werte für sin(α) und cos(α)!

α	sin(α)	cos(α)
0°		
10°		
20°		
30°		
40°		
45°		
50°		
60°		
70°		
80°		
90°		

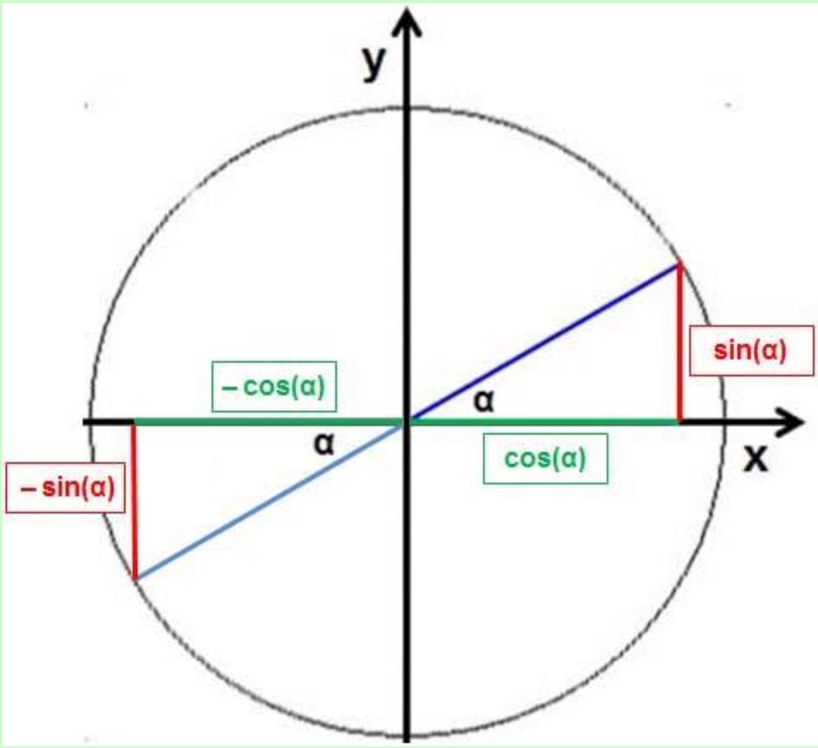
sin(α) = cos(90° – α)

cos(α) = sin(90° – α)

sin(–α) = – sin(α)

cos(–α) = cos(α)

tan(–α) = – tan(α)

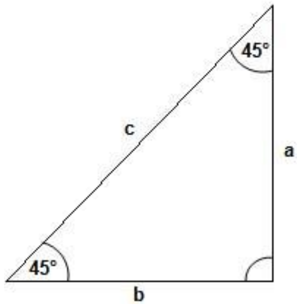


Merkhilfe für die wichtigsten Winkel	sin(0°) = cos(90°) = ½ $\sqrt{0}$ = 0 sin(30°) = cos(60°) = ½ $\sqrt{1}$ = 0,5 sin(45°) = cos(45°) = ½ $\sqrt{2}$ = 0,7071 sin(60°) = cos(30°) = ½ $\sqrt{3}$ = 0,8660 sin(90°) = cos(0°) = ½ $\sqrt{4}$ = 1

63.) Beweisen Sie, dass

sin(45°) = ½ $\sqrt{2}$

ist!



64.) Lösen Sie die Aufgaben ohne Hilfe eines Taschenrechners!

tan(0°) =	
tan(30°) =	
tan(45°) =	
tan(60°) =	
tan(90°) =	

65.) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke!

$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$		$\tan(\alpha) \bullet \cos(\alpha)$	
$\frac{\sin(\alpha)}{\tan(\alpha)}$		$\frac{1}{\cos(\alpha) \bullet \tan(\alpha)}$	
$\frac{\tan(\alpha)}{\sin(\alpha)}$		$\frac{\sin^2(\alpha)}{\tan(\alpha)}$	
$\frac{\tan^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}$		$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$	

66.) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke und ermitteln Sie die Zahlenwerte! Lösen Sie die Aufgaben ohne Hilfe eines Taschenrechners!

$\sin(1800°)$	
$\cos(2700°)$	
$\tan(990°)$	
$\sin(120°)$	
$\sin(870°)$	
$\cos(870°)$	
$\cos(120°)$	
$\sin(420°)$	
$\sin(150°)$	
$\sin(-150°)$	
$-\sin(150°)$	
$\cos(45°)$	
$\cos(-45°)$	
$-\cos(45°)$	
$\cos(780°)$	
$\sin(-120°)$	

67.) Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke und ermitteln Sie die Zahlenwerte! Lösen Sie die Aufgaben ohne Hilfe eines Taschenrechners!

sin(300°)	
cos(300°)	
tan(300°)	
sin(315°)	
cos(315°)	
tan(315°)	
sin(330°)	
cos(330°)	
tan(330°)	

68.) Berechnen Sie für **sin(30°) = cos(40° + x)** die Variable x!

69.) Vereinfachen Sie den Ausdruck **$\sin^3(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos^2(\alpha)$** !

70.) Vereinfachen Sie den Ausdruck **$\sin(60°) \cdot \cos(30°) + \sin(30°) \cdot \cos(60°)$** !

71.) Vereinfachen Sie den Ausdruck **$3 \cdot \tan^3(45°) + \cos(30°) - \sin(60°)$** !

72.) Vereinfachen Sie den Ausdruck **$\dfrac{2 \cdot \tan(45°) \cdot \tan(30°)}{\cos(30°)}$** !

73.) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\dfrac{3 \cdot \tan(30°) \cdot \sin(60°)}{\sin(30°)}$!

74.) Vereinfachen Sie den Ausdruck $\dfrac{9 \cdot \tan(225°) \cdot \tan^2(135°)}{\cos^4(-30°)}$!