# Die Gleichungen

 → www.bommi2000.de

# 1 Die linearen Gleichungen und Ungleichungen

## 1.1 Der Aufbau von Gleichungen und Ungleichungen

freie Variable

$$\underset{\text{gebundene Variable}}{\boxed{y = a \cdot \overset{\overset{\text{freie Variable}}{\downarrow}}{x} + b}}$$

$\boxed{y = a \cdot x + b}$ ... linearer Term mit einer Variablen (x)

$\uparrow$ $\uparrow$

gebundene Variable

Variable werden durch Buchstaben gekennzeichnet.

- gebundene Variable: konstante Zahl innerhalb einer Betrachtung (= Aufgabe)
  $\rightarrow$ verwendet werden Anfangsbuchstaben des Alphabets
- freie Variable: kann innerhalb einer Betrachtung (= Aufgabe) beliebige Werte annehmen
  $\rightarrow$ verwendet werden meist die Buchstaben x, y, z

| | |
|---|---|
| $2x + 3$ | linearer Term mit einer Variablen |
| $a_1 x + a_2 y + a$ | linearer Term mit zwei Variablen (x, y)<br>$\rightarrow$ $a_1$, $a_2$ und a sind gebundene Variable |
| $ax^2 + bx + c$ | gemischt quadratischer Term |
| $(a + b)^n$ | Binom |
| $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ | Polynom |
| $\sqrt{x+8}$ | Wurzelterm |

Definitionsbereich: … ist Menge aller Zahlen, mit denen ein Term belegt werden kann.

| | | | |
|---|---|---|---|
| z. B.: | $\sqrt{x+8}$ | $X = [-8 ; +\infty)$ | |
| | $\dfrac{1}{4x-8}$ | $X = R \setminus \{2\}$ | Nenner darf nicht 0 sein!<br>\ ... „ohne“ oder Differenz |
| | $4x \leq 8$ | $X = (-\infty ; 2]$ | |

1.) $7x - [17x - 3 - (-2x - 4) + 8] + 5 = -x - [-3x - (-6x - 4)] - 3 - [15 - (4 + x) + x]$

2.) $15x - [3x - 7 + (-4x - 2)] = 12x - [-16x + 3 - (4x - 4)]$

3.) Wo steckt der Fehler?

$$
\begin{aligned}
7 &= 7 \\
7 &= 5 + 2 && | \cdot (7 - 5) \\
49 - 35 &= 35 + 14 - 25 - 10 && | - 14 \\
49 - 35 - 14 &= 35 - 25 - 10 \\
7 \cdot (7 - 5 - 2) &= 5 \cdot (7 - 5 - 2) && | : (7 - 5 - 2) \\
7 &\neq 5
\end{aligned}
$$

## 1.2 Die Bruchgleichungen

Bei Bruchgleichungen enthält sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruches einen linearen Term.

Bruchgleichungen dürfen nicht durch Null geteilt werden!!!

z. B.:

$$\frac{5x}{2x-4} = 5 \quad | \cdot (2x-4) \qquad \rightarrow \text{Definitionsbereich: } \mathbf{X = R \setminus \{2\}}$$

$$5x = 5 \cdot (2x-4)$$

$$5x = 10x - 20 \quad | -5x + 20$$

$$20 = 5x \quad | : 5$$

$$\mathbf{x = 4} \qquad \rightarrow \mathbf{L = \{4\}}$$

4.) Ermitteln Sie jeweils den Definitionsbereich und die Lösungsmenge!

a) $\frac{3}{x} = 3$

b) $\frac{2x-3}{4x} = 2$

c) $\frac{2x}{x-2} = 4$

d) $\frac{30}{x \cdot (x-3)} = 3$ $\quad$ **X = R \ {0 ; 3}** $\quad$ **L = {+5 ; –2}**

5.) $\frac{9}{4x-7} = \frac{16}{15x-4}$

6.) $\dfrac{4}{x-4} - \dfrac{2}{x-3} = \dfrac{14}{x \cdot (x-7) + 12}$

7.) $\dfrac{3 \cdot (x+5)}{2x+3} - 1 = \dfrac{x+10}{2x-3} + \dfrac{2 \cdot (x+15)}{4x^2-9}$

## Binomische Formeln:

① $(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$

② $(a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

## 1.3 Die Verhältnisgleichungen

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}} \quad \text{oder} \quad \boxed{a : b = c : d}$$

Umtauschmöglichkeiten:

① $\boxed{b \cdot c = a \cdot d}$ Innenglied • Innenglied = Außenglied • Außenglied

② $\boxed{\frac{a}{c} = \frac{b}{d}}$ Zähler : Zähler = Nenner : Nenner

③ $\boxed{\frac{b}{a} = \frac{d}{c}}$ Reziproke der linken Seite = Reziproke der rechten Seite

## 1.4 Die Textgleichungen

8.) 24.000 Euro Gewinn teilen 3 OHG-Gesellschafter so, dass A 2.000 Euro mehr als ein Drittel von B erhält. C bekommt 10.000 Euro weniger als das Vierfache von A. Wie viel Euro Gewinn erhält der Gesellschafter C?

9.) Bank A berechnet pro Monat 3,50 Euro Kontoführungsgebühr plus 0,30 € für jede Buchung. Dagegen berechnet die Bank B pro Monat 5,00 € Kontoführungsgebühr plus 0,25 Euro je Buchung. Ab wie viel Buchungen im Monat ist die Bank B für den Kunden günstiger?

10.) Ein Handelsbetrieb bietet ein Elektrogerät höchstens zum Listenverkaufspreis von 300 Euro an. Das Unternehmen rechnet mit 40 % Handlungskostenzuschlag und einem Gewinnzuschlag von 15 %. Wie hoch darf der Bezugspreis für das Gerät höchstens sein?

| | |
|---|---|
| | Bezugspreis |
| + | Handlungskosten |
| | Selbstkosten |
| + | Gewinnzuschlag |
| | Listenverkaufspreis |

11.) Ein Kaufmann bezieht am 20.1. Waren im Wert von 5.000 Euro. Zahlungsziel ist in zwei Monaten. Zum Ausgleich der Schuld übersendet er seinem Gläubiger am 12.3. einen Wechsel, fällig am 15.5. Über welchen Betrag lautet der Wechsel, wenn 9 % Diskont einkalkuliert werden?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Diskontzeitraum: | 20.3. bis 15.5. | 20. bis 31.3. | = | 11 Tage |
| | | April | = | 30 Tage |
| | | 1. bis 15.5. | = | 15 Tage |
| | | | | 56 Tage |

**Wechselbetrag – Diskont = Barwert**

$$W - \frac{W \cdot 9 \cdot 56}{100 \cdot 360} = 5.000 \qquad | \cdot 36.000$$

**Mit der Einrichtung der Europäischen Zentralbank (EZB) stellte die Deutsche Bundesbank zum 1.1.1999 ihr Diskontgeschäft ein. Durch diesen Wegfall der Refinanzierungsmöglichkeit verlor der Wechsel als Zahlungsmittel seitdem dramatisch an Bedeutung.**

12.) Ein Kapital wächst nach einem Jahr Verzinsung bei 3½ % p. a. Zinsen auf 7.762,50 Euro. Wie viel Euro betrug das ursprüngliche Kapital?

13.) Zwei Sparbücher lauten über 5.000 Euro und 3.500 Euro. Das zweite Sparbuch wird mit 1,5 % höher verzinst als das erste. Die Zinsgutschrift am Ende des Jahres beträgt für beide Sparbücher zusammen 392,50 Euro.

Zu welchem Zinsfuß wurde das erste Sparbuch verzinst?

14.) Ein Betrieb nahm einen Kontokorrentkredit in Anspruch. Die ersten 30 Tage wird der Kredit mit 8 % p. a. verzinst, die nächsten 60 Tage mit 9 % p. a. und die restlichen 45 Tage mit 7½ % p. a. Wie hoch war der Kreditbetrag, wenn der Betrieb inklusive Zinsen 8.805,10 Euro zurückzahlt?

15.) Welche Zahl muss man jeweils zu den Zählern und Nennern der Brüche $^{9}/_{13}$ und $^{16}/_{22}$ addieren, damit beide Brüche den gleichen Wert erhalten?

16.) Eine Cafeteria mischt zwei Kaffeesorten und verkauft die Mischung für 7½ Euro je kg. Eine Sorte kostet 4 Euro je kg. Von ihr gehen 50 kg in die Mischung ein. Die andere Sorte kostet 8½ Euro je kg. Wie viel kg der zweiten Sorte werden benötigt, damit die Cafeteria weder Gewinn noch Verlust macht?

17.) Eine Kaffeerösterei mischt drei Sorten Kaffee zu einer Mischung. Sie benutzt 25 kg der Sorte A, die 4,50 Euro je kg kostet. Von der Sorte B werden 15 kg mehr benutzt als von der Sorte C. Sorte B kostet 5,50 Euro je kg, Sorte C 7,50 Euro je kg. Die Mischung wird in 500-g-Paketen verpackt. Das Packungsmaterial kostet pro 500-g-Paket 0,20 Euro. Die Mischung wird zum Preis von 7 Euro je kg angeboten. Wie viel kg der Sorte B wurden für die Mischung eingesetzt, wenn insgesamt ein Gewinn von 200 Euro erzielt wird?

18.) Der Zähler eines Bruches ist um 2 größer als der Nenner. Vergrößert man den Zähler um 12 und den Nenner um 20, so erhält man einen Bruch, dessen Wert gleich dem Kehrwert (= dem Reziproken) des ursprünglichen Bruches ist.

Wie heißt der ursprüngliche Bruch?

19.) Peter ist 11 Jahre alt. Als Peter geboren wurde, war sein Vater 21 Jahre alt. In 12½ Jahren wird er genau die Hälfte des dann gültigen Durchschnittsalters seiner Eltern erreicht haben. Wie alt war Peters Mutter bei seiner Geburt?

20.) Ein Mann hat für 25.000 Euro Wertpapiere erworben. Sorte 1 wird mit 7 %, Sorte 2 mit 9 % verzinst. Die Zinszahlung am Ende des Jahres beträgt für beide Sorten zusammen 2.010 Euro. Wie viel Euro hat der Mann in Sorte 2 angelegt?

21.) In New York startet ein Jumbo-Jet nach London. Er fliegt mit durchschnittlich 950 km/h auf der 6.250 km langen Strecke. Zwei Stunden später startet eine Concorde in London. Sie fliegt mit 2.050 km/h Richtung New York.

a) Nach wie viel Stunden begegnen sich die Flugzeuge?

b) Wie weit vor London begegnen sich die Flugzeuge?

22.) 50 Liter 90 %-iger Alkohol sollen mit 50 %-igem und 80 %-igem Alkohol so gemischt werden, dass 450 Liter 75 %-iger Alkohol entstehen.

Wie viel Liter des 50 %-igen und des 80 %-igen Alkohols werden benötigt?

23.) Ein Fünftel der Bienen fliegt zu Rosen, ein Drittel zu Nelken, das Dreifache der Differenz zwischen diesen beiden Zahlen zu Tulpen. Eine Biene fliegt ziellos umher. Wie viele Bienen sind es insgesamt?

## 2 Die quadratischen Gleichungen

Jede Gleichung mit einem quadratischen x-Glied heißt **quadratische Gleichung**.

z. B.: $y = 4x^2 - 2x - 12$

$y = 3x \cdot (x - 4) + 17$

allg. Form: $ax^2 + b \cdot x + c \quad | : a$

Normalform: $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}$

Lösungsformel:

$$\boldsymbol{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

24.) $x^2 - 5x - 2{,}75 = 0$

25.) $(x + 4)^2 = 9x + 36$

26.) $$\frac{1}{2x} + \frac{2}{x-2} = \frac{x-2}{4x} + 1$$

27.) $$\frac{x}{x^2 - 2x - 3} + \frac{x-3}{x+1} = \frac{1}{x-3}$$

28.) $$\frac{x-2}{x^2-4} + \frac{x+1}{x+2} = \frac{4x-5}{x-2}$$

29.) $$\frac{4}{3x+1} - \frac{3}{x+5} = \frac{1}{2}$$

30.) $$\frac{23}{4x+7} + \frac{7 \cdot (4x+7)}{(4x+7) \cdot (x-2)} - \frac{3 \cdot (x-2)}{x-2} = \frac{3}{2}$$

31.) $$\frac{x-2}{x^2-4} + \frac{2x-4}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

32.) $$\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2}{x^2-4}$$

33.) $$\frac{3x}{x-1} - \frac{6}{x+1} = \frac{4 \cdot (x+1)}{x^2-1}$$

34.) $$\frac{4x}{x+1} + \frac{3x}{x+1} = \frac{x \cdot (49+x)}{(x+1)^2}$$

35.) $$\frac{x+4}{7-x} + \frac{2x}{7+x} = \frac{-(3x+1)}{49-x^2}$$

36.) $\dfrac{4}{x+3} + \dfrac{2x}{x-3} - \dfrac{3x-45}{x^2-9} = -11$

37.) $\dfrac{x+3}{x-4} = \dfrac{2 \cdot (x+4)}{x+3} - \dfrac{12x-1}{x^2-x-12}$

38.) $$\frac{2x}{x-4} + \frac{3}{4} + \frac{x-5}{x+4} = \frac{16x}{x^2-16}$$

39.) $$\frac{4x}{x-2} + \frac{2x-1}{x-2} + 2 = \frac{4x^2}{3 \cdot (x-2)^2} + 7$$

40.) $\dfrac{6}{3x + 3} = \dfrac{2{,}125 - 0{,}25x}{0{,}5x^2 - 0{,}5} - \dfrac{2x - 1}{2x - 2}$

41.) $\dfrac{-(x - 1)}{0{,}5x + 1} - \dfrac{9}{3x - 6} = \dfrac{-18}{2x^2 - 8}$

42.) $$\frac{4x + 12}{4x - 12} - \frac{x - 3}{x^2 - 9} = \frac{6x - 18}{(x - 3) \cdot (x^2 - 9)}$$

43.) $$\frac{2x + 7}{x - 7} - \frac{2x^2 - 98}{2x + 14} = -\frac{59}{x - 7}$$

44.) Eine Maschine mit 20.000 Euro Anschaffungswert steht nach zweimaliger degressiver Abschreibung mit einem Restwert von 16.928 Euro zu Buche. Wie hoch war der Abschreibungssatz?

45.) Der Umsatz eines Betriebes stieg im ersten Jahr von 200.000 Euro um einen bestimmten Prozentsatz. Im 2. Jahr sank der Umsatz um diesen Prozentsatz auf 199.875 Euro. Wie hoch war der Prozentsatz?

46.) Ein Einzelhandelsunternehmen verkauft eine Ware zu 468,75 Euro. Es rechnet mit einem Zuschlag für seine Kosten, der doppelt so hoch ist wie der Gewinnzuschlag, der auf die Selbstkosten berechnet wird.

Wie hoch ist der Kostenzuschlag, wenn der Einstandspreis 250 Euro beträgt?

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Einstandspreis | 100 % | |
| + | Kosten | + 2g | |
| | Selbstkosten | (100 + 2g) % | 100 % |
| + | Gewinn | | + g |
| | Verkaufspreis | | (100 + g) % |

47.) J. zahlt 1.200 Euro auf ein Sparbuch ein. Nach einem Jahr hebt er 236 Euro ab. Nach dem zweiten Jahr beträgt das Guthaben samt Zinsen 1.030 Euro.

Wie hoch war der Guthabenzinssatz, der in beiden Jahren gleich war?

48.) Ein Sparguthaben von 5.000 Euro wird ein Jahr lang mit einem bestimmten Prozentsatz verzinst. Die Zinsen werden dem Sparbuch am Ende des Jahres gut geschrieben. Nach dem ersten Jahr wird der Zinssatz um einen Prozentpunkt gesenkt. Das Sparbuch wächst nach dem zweiten Jahr samt Zinsen auf 5.253 Euro Guthaben an. Wie hoch war der Zinssatz im ersten Jahr?

49.) Eine Rechnung über 5.000 Euro wird unter Abzug von Rabatt und Skonto mit 4.268 Euro bezahlt.

Wie hoch war der Rabatt, der vier Mal so hoch war wie das Skonto?

| | | | |
|---|---|---|---|
| | LEP | 100 % | |
| – | Rabatt | – r | |
| | ZEP | (100 – r) % | 100 % |
| – | Skonto | | – s |
| | BEP | | (100 – s) % |

50.) Multipliziert man eine zweiziffrige Zahl mit ihrer Zehnerziffer, so ergibt sich die 28-fache Quersumme.
Wie heißt die Zahl, wenn die Einerziffer um 2 kleiner ist als die Zehnerziffer?

51.) Gegeben sind drei aufeinander folgende natürliche Zahlen. Die Differenz der Quadrate der beiden größeren Zahlen ist gleich dem Quadrat der kleineren Zahl. Wie heißt die mittlere der drei Zahlen?

52.) Berechnen Sie den Durchmesser eines 2 m langen Drahtes aus reinem Kupfer ($\varrho$ = 0,01721 Ωmm²/m) bei einem Widerstand von 0,012 Ω!

53.) Die Summe der Quadrate von vier aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist 230. Wie heißt die größte der vier Zahlen?

54.) Der Gesamtwiderstand von zwei parallel geschalteten Widerständen beträgt 2,4 Ω. Werden beide Widerstände in Reihe geschalten, ergibt sich ein Gesamtwiderstand von 10 Ω. Berechnen Sie die beiden Einzelwiderstände!

Parallelschaltung: $R_{ges} = \frac{R_1 \bullet R_2}{R_1 + R_2}$

Reihenschaltung: $R_{ges} = R_1 + R_2$

55.) Gegeben ist ein Stromkreis mit 100 V konstanter Spannung.
Welche Stromstärke liegt an, wenn ein Vergrößern des Widerstandes um 5 Ω ein Absinken der Stromstärke um 1 A bewirkt?

Ohmsches Gesetz: $R = \frac{U}{I}$

56.) $2{,}5x = 0{,}5x^2 + 4^{0{,}5}$

## Potenzgesetze:

| | |
|---|---|
| $a^1 = a$ | Eine Potenz mit dem Exponenten 1 hat den Wert der Basis. |
| $b^0 = 1$ | Eine Potenz mit dem Exponenten 0 hat den Wert 1. |
| $c^m \cdot c^n = c^{m+n}$ | Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert. |
| $\frac{d^m}{d^n} = d^{m-n}$ | Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert. |
| $(e^m)^n = e^{m \cdot n}$ | Potenzen werden potenziert, indem man ihre Exponenten multipliziert. |
| $f^m \cdot g^m = (fg)^m$ | Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert. |
| $h^{-n} = \frac{1}{h^n}$ | eine Potenz mit negativem Exponenten |
| $i^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{i^m}$ | eine Potenz mit einem Bruch als Exponent |

## 3 Die „nicht lösbaren" quadratischen Gleichungen

Für die Gleichung $x^2 = +1$ ergeben sich die zwei Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$, also zwei reelle Zahlen.

Für die Gleichung $x^2 = -1$ scheint es keine Lösung zu geben, da der Wert unter der Wurzel kleiner Null (also negativ) ist.
Diese Feststellung betrifft aber nur den reellen Zahlenbereich.

Im Bereich der komplexen Zahlen ist die Gleichung $x^2 = -1$ lösbar, indem man die **imaginäre Einheit i** einführt.

Es gilt:

$$\sqrt{-1} = i$$

Hinweis zur Schreibweise:

Während in der Mathematik die Darstellung einer komplexen Zahl mithilfe des Buchstaben **i** üblich ist, nutzt die Elektrotechnik den Buchstaben **j** und setzt diesen im Imaginärteil voran, z. B. **z = 1 + j4**

57.) $\boxed{-51 = 3 \cdot (x^2 + 2x)}$

$$0 = 3x^2 + 6x + 51 \qquad | :3$$

$$0 = x^2 + 2x + 17$$

$$x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4} - 17}$$

$$= -1 \pm \sqrt{-16}$$

$$\rightarrow \mathbf{x_1 = -1 + 4i}$$

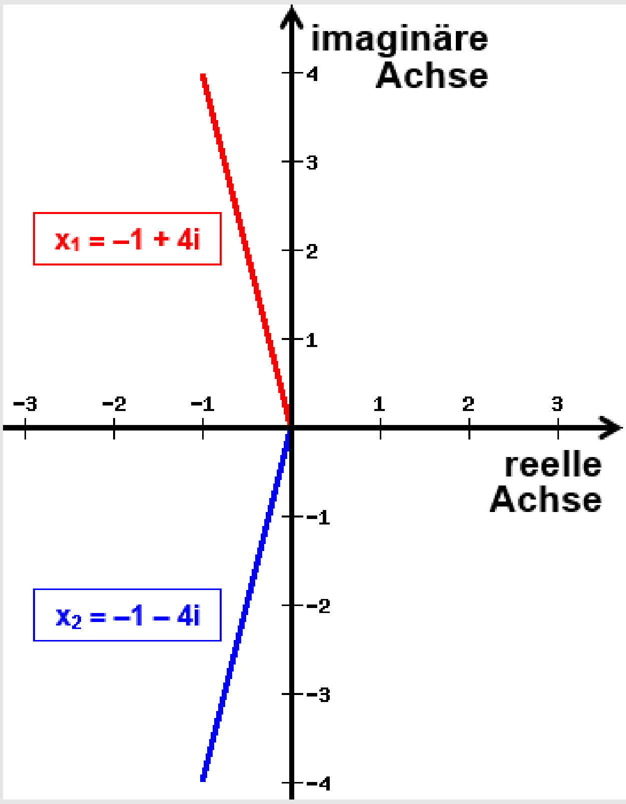
$$\mathbf{x_2 = -1 - 4i}$$

Die komplexe Zahl $x_1 = -1 + 4i$ besteht aus dem Realteil (auch: reeller Teil) $-1$ und dem Imaginärteil (auch: imaginärer Teil) $4i$ .

Grafisch lassen sich die Zahlen

$\mathbf{x_1 = -1 + 4i}$ und $\mathbf{x_2 = -1 - 4i}$

so darstellen:



58.) $-4x^2 - 8 = -8x$

59.) $0 = 2x^2 - 2x + 25$

60.) $-16 \cdot (x^2 + 4x) = 73$

61.) $0 = x^2 - 2x + 10$

62.) $0 = 2a^2 + 4a + 10$

63.) $0 = x^2 - 8 \cdot (x - 5) + 1$

64.) $0 = 4x^2 + 12x + 13$

65.) $x = 0{,}25x^2 + 2$

66.) Ermitteln Sie jeweils die Zahlenwerte!

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| a) | $i$ | | b) | $i^2$ | |
| c) | $i^3$ | | d) | $i^4$ | |
| e) | $i^5$ | | f) | $i^6$ | |
| g) | $i^7$ | | h) | $i^8$ | |
| i) | $i^9$ | | j) | $i^{10}$ | |
| k) | $i^{11}$ | | l) | $i^{12}$ | |
| m) | $i^{100}$ | | n) | $i^{2014}$ | |

## 4 Die linearen Gleichungssysteme mit zwei Variablen

### a) das Gleichsetzungsverfahren

Beide Gleichungen werden nach einer der gesuchten Variablen aufgelöst. Dann werden die Werteseiten beider Gleichungen zu einer neuen Gleichung zusammengefügt.

z. B.:

$$\text{I} \quad 26x - 7y = 31 \qquad\qquad \text{II} \quad 4y = 2x + 8$$
$$26x = 31 + 7y \qquad\qquad 2x = 4y - 8$$
$$x = {}^{31}/_{26} + {}^{7}/_{26}\,y \qquad\qquad x = 2y - 4$$

$$\text{I} = \text{II} \qquad {}^{31}/_{26} + {}^{7}/_{26}\,y = 2y - 4 \qquad | \cdot 26$$
$$31 + 7y = 52y - 104$$
$$135 = 45y \quad \rightarrow \quad \mathbf{y = 3}$$
$$\rightarrow \quad \mathbf{x = 2}$$

### b) das Einsetzungsverfahren

Eine der beiden Gleichungen wird nach einer Variablen aufgelöst. Dann wird der Wert dieser Variablen anstelle der Variablen in der zweiten Gleichung eingesetzt.

z. B.:

$$\text{I} \quad 26x - 7y = 31$$
$$\text{II} \quad 4y = 2x + 8 \quad \rightarrow \quad y = \tfrac{1}{2} \cdot x + 2$$

$$\text{II in I} \quad 26x - 7 \cdot (\tfrac{1}{2} \cdot x + 2) = 31$$
$$26x - 3\tfrac{1}{2} \cdot x - 14 = 31 \qquad | \cdot 2$$
$$45x - 28 = 62$$
$$45x = 90 \quad \rightarrow \quad \mathbf{x = 2}$$
$$\rightarrow \quad \mathbf{y = 3}$$

### c) das Additionsverfahren

Beide Gleichungen werden entsprechend multipliziert und dann so miteinander addiert/subtrahiert, dass eine der Variablen entfällt.

z. B.:

$$\text{I} \quad 26x - 7y = 31$$
$$\text{II} \quad 4y = 2x + 8$$

$$\text{II} \quad -2x + 4y = 8 \qquad | \cdot 13$$
$$-26x + 52y = 104$$

$$\text{I} + \text{II} \quad 26x - 7y = 31$$
$$\underline{-26x + 52y = 104}$$
$$45y = 135 \quad \rightarrow \quad \mathbf{y = 3}$$
$$\rightarrow \quad \mathbf{x = 2}$$

67.)

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 4x + 5y = 10 \\ \text{II} & 2x - 3y = 16 \end{array}$$

68.)

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 4{,}5x - 7{,}2y = 10{,}8 \\ \text{II} & 2{,}1y + 3x = 14{,}1 \end{array}$$

69.)

$$\begin{array}{ll} \text{I} & \frac{2x}{3} - \frac{3y}{4} = \frac{-2}{24} \\ \text{II} & \frac{3x}{5} + \frac{2y}{3} = \frac{19}{15} \end{array}$$

70.)

| | | |
|---|---|---|
| I | $\frac{2}{3x} + \frac{1}{2y} = \frac{29}{48}$ |
| II | $\frac{1}{2x} - \frac{3}{4y} = \frac{19}{32}$ |

71.)

$$\text{I} \quad \frac{2}{x+2} + \frac{4}{y-3} = \frac{18}{35}$$

$$\text{II} \quad \frac{1}{y-3} - \frac{4}{x+2} = \frac{27}{35}$$

72.)

| | |
|---|---|
| I | $3 \cdot \sqrt{x} - 7y = 20$ |
| II | $\sqrt{\frac{x}{4}} + y = -1$ |

73.) Ermitteln Sie die ganzzahlige Lösung!

| | |
|---|---|
| I | $\frac{1}{\sqrt{2y}} = \frac{1}{x - 1}$ |
| II | $1 - \frac{2}{x} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{2y}}$ |

74.)

| | |
|---|---|
| I | $2 \cdot \sqrt{x} + 3y = 16 - y$ |
| II | $2y - \sqrt{4x} = 5 - y$ |

75.)

| | |
|---|---|
| I | $5x + 2y = 1$ |
| II | $-2x - y = 0$ |

76.) Ein Reisender erhält 2.500 Euro festes Monatsgehalt sowie 3 % Provision auf seinen Umsatz. Ein Handelsvertreter erhält nur Provision (8 % vom Umsatz). Bei welchem Monatsumsatz verdienen beide gleich viel?

77.) Es werden zwei Sorten Alkohol gemischt. Sorte 1 ist 50 %-ig, Sorte 2 70 %-ig. Die Mischung enthält 100 Liter 58 %-igen Alkohol. Vertauscht man die benutzten Mengen, so ergibt sich eine Mischung mit 62 %-igem Alkohol.

Wie viel Liter der Sorte 1 waren in der ursprünglichen Mischung?

78.) Ein Betrieb kann benötigte Teile selbst herstellen bei Fixkosten von 63.800 Euro und proportionalen Kosten von 6 Euro pro Stück. Alternativ könnten die Teile fremdbezogen werden zum Einkaufspreis von 28 Euro pro Stück.

Bei wie viel Stück liegt die kritische Menge?

79.) Ein Händler kauft 300 Stück der Sorte 1 und 500 Stück der Sorte 2 für insgesamt 2.650 Euro. Auf Sorte 1 schlägt er 40 % Kalkulationszuschlag, auf Sorte 2 35 % und verkauft beide Mengen zu insgesamt 3.615 Euro.

Wie viel kostet im Einkauf ein Stück der Sorte 1?

80.) Zwei Kapitalien (7.500 und 18.000 Euro) werden zu unterschiedlichen Zinssätzen für verschiedene Laufzeiten verzinst. Für das höhere Kapital gibt es ein Prozent Zinsen mehr. Die 7.500 Euro werden für 240 Tage angelegt. In welcher Zeit bringt das größere Kapital 200 Euro mehr Zinsen als das kleinere, wenn die Zinsen für beide Kapitalien zusammen 700 Euro betragen?

81.) Zwei Rechnungen über 1.000 und 900 Euro werden unter Abzug von Skonto bezahlt. Die Skontosätze (x und y) sind verschieden. Der Überweisungsbetrag für beide Rechnungen zusammen lautet 1.852 Euro. Würden die Skontosätze getauscht, so müsste der Überweisungsbetrag um einen Euro höher sein.

Wie viel Skonto gibt es auf die ursprüngliche Rechnung über 900 Euro?

82.) Die Gesellschafter A und B sind an einer OHG im Verhältnis 4 **:** 3 beteiligt. Wenn beide ihr Kapital um je 40.000 Euro erhöhen, gilt das Verhältnis 6 **:** 5.

Wie hoch ist die ursprüngliche Kapitaleinlage von B?

83.) Eine Maschine (Anschaffungswert = 12.000 Euro) wurde 3 Jahre linear abgeschrieben. Eine zweite Maschine (Anschaffungswert = 20.000 Euro) wurde 6 Jahre linear abgeschrieben. Die Restbuchwerte beider Maschinen betragen zusammen 15.500 Euro. Würde man die AfA-Sätze der Maschinen tauschen, so wäre diese Summe 13.400 Euro.

Wie hoch ist der ursprüngliche AfA-Satz der ersten Maschine?

84.) Zur Erledigung einer Arbeit benötigt ein Meister allein 40 Stunden. Würde ihm ein Arbeiter helfen, so würde sich die Zeit auf 25 Stunden verkürzen.

Wie lange würde der Arbeiter allein für diese Arbeit brauchen?

85.) Ein Betrieb produziert 45.000 Stück bei 172.500 Euro Gesamtkosten. Bei einer Herstellungsmenge von 40.000 Stück sinken die variablen Kosten um 10 %, die fixen Kosten bleiben gleich. Die Gesamtkosten belaufen sich dann auf 141.000 Euro. Wie hoch sind die ursprünglichen variablen Kosten je Stück?

86.) Für zwei Rechnungen über 2.000 Euro und 3.000 Euro wurden nach Abzug von Skonto 4.890 Euro überwiesen. Wäre der Skontosatz der ersten Rechnung auch auf die zweite angewandt worden, so wäre der Überweisungsbetrag um 15 Euro niedriger.
Wie hoch ist der ursprüngliche Skontosatz der 3.000-Euro-Rechnung?

87.) Am Bahnhof fährt ein Zug um 7:30 Uhr ab. Wenn jemand von seiner Wohnung zum Bahnhof mit dem Fahrrad mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h fährt, so kommt er 10 Minuten zu spät. Fährt er mit 25 km/h, so kommt er 6 Minuten zu früh am Bahnhof an. Wie viel Kilometer wohnt er vom Bahnhof entfernt?

88.) Vor 7 Jahren war der Vater drei Mal so alt wie sein Sohn heute ist. In 18 Jahren wird er doppelt so alt sein wie sein Sohn. Wie alt ist der Sohn heute?

89.) Die Summe zweier Zahlen ist 25. Addiert man zur ersten Zahl 3 und subtrahiert von der zweiten Zahl 4, so erhält man aus beiden Zahlen einen Quotienten von $^{7}/_{5}$. Wie lauten die beiden ursprünglichen Zahlen?

90.) Addiert man zum Zähler und Nenner eines Bruches jeweils 2, so erhält man $^3/_5$. Würde man vom ursprünglichen Bruch im Zähler und Nenner jeweils 1 subtrahieren, so wäre der Wert des Bruches $^1/_2$.

Wie lautet der ursprüngliche Bruch?

91.) Ein Bruch hat den Wert $^4/_5$. Addiert man zum Zähler 7 und subtrahiert man vom Nenner 14, so erhält man den Wert $^5/_3$. Wie heißt der ursprüngliche Bruch?

92.) Mutter und Tochter sind zusammen 65 Jahre alt. Vor zehn Jahren war die Mutter vier Mal so alt wie ihre Tochter. Wie alt ist die Mutter heute?

93.) Ein Mann ist jetzt vier Mal so alt wie sein Sohn. In vier Jahren wird er nur noch drei Mal so alt sein. Wie alt sind Vater und Sohn heute?

94.) Ein Mann ist 47 Jahre alt. Seine drei Söhne sind zusammen zehn Jahre älter als ihr Vater. Vor wie vielen Jahren war der Mann genauso alt, wie seine drei Söhne zusammen damals alt waren?

## 5 Die linearen Gleichungssysteme mit drei und mehr Variablen

Um ein lineares Gleichungssystem mit drei Variablen lösen zu können, benötigt man mindestens drei unabhängige Gleichungen.

95.)

$$
\begin{array}{llcr}
\text{I} & 2x + 3y - 4z & = & 4 \\
\text{II} & 3x - 2y + 7z & = & 19 \\
\text{III} & x + 4y - 3z & = & 9
\end{array}
$$

Neben dem demonstrierten Vorgehen können derartige Gleichungssysteme mit dem Austauschverfahren, der CRAMERschen Regel, dem Determinantenverfahren, dem Matrizenverfahren oder dem GAUßschen Algorithmus gelöst werden.

Der GAUßsche Algorithmus (auch: GAUßsches Eliminationsverfahren)

nach Carl Friedrich GAUß (1777 – 1855)

96.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x + 3y + 8 & = & 2z \\ \text{II} & 4x + z & = & 2y + 10 \\ \text{III} & x + y + z & = & 1 \end{array}$$

Umstellen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x + 3y - 2z & = & -8 \\ \text{II} & 4x - 2y + z & = & 10 \\ \text{III} & x + y + z & = & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a_{11}x + a_{12}y - a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x - a_{22}y + a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z & = & b_3 \end{array}$$

1. Schritt: Gleichung I mit $q_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}}$ multiplizieren (hier: $q_{21} = -2$)

$(-2) \bullet \text{I} = \text{IV} \quad -4x - 6y + 4z = 16$

2. Schritt: Addieren der Gleichungen IV und II

$$\begin{array}{lrcl} \text{IV} & -4x - 6y + 4z & = & 16 \\ \underline{+\text{II}} & \underline{4x - 2y + z} & \underline{=} & \underline{10} \\ \text{V} & -8y + 5z & = & 26 \end{array}$$

$\rightarrow$ Die x-Glieder entfallen.

3. Schritt: Gleichung I mit $q_{31} = \frac{-a_{31}}{a_{11}}$ multiplizieren (hier: $q_{31} = -\frac{1}{2}$ )

$(-½) \bullet \text{I} = \text{VI} \quad -x - 1½\, y + z = 4$

4. Schritt: Addieren der Gleichungen VI und III

$$\begin{array}{lrcl} \text{VI} & -x - 1½\, y + z & = & 4 \\ \underline{+\text{III}} & \underline{x + y + z} & \underline{=} & \underline{1} \\ \text{VII} & -½\, y + 2z & = & 5 \end{array}$$

$\rightarrow$ Die x-Glieder entfallen.

5. Schritt: Gleichung V mit $q_{75} = \frac{-a_{72}}{a_{52}}$ multiplizieren (hier: $q_{75} = -\frac{1}{16}$ )

$-\frac{1}{16} \bullet \text{V} = \text{VIII} \quad ½\, y - \frac{5}{16} z = -\frac{13}{8}$

6. Schritt: Addieren der Gleichungen VIII und VII

$$\begin{array}{lrcll} \text{VIII} & ½\, y - \frac{5}{16} z & = & -\frac{13}{8} & \\ \underline{+\text{VII}} & \underline{-½\, y + 2z} & \underline{=} & \underline{5} & \\ & \frac{27}{16} z & = & \frac{27}{8} & | \bullet 16 \\ & 27z & = & 54 & | : 27 \\ \text{IX} & z & = & 2 & \end{array}$$

7. Schritt: Die Gleichungen I, V und IX in Dreiecksform schreiben

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x + 3y - 2z & = & -8 \\ \text{V} & -8y + 5z & = & 26 \\ \text{IX} & \mathbf{z} & \mathbf{=} & \mathbf{2} \end{array}$$

$\rightarrow$ **$y = -2$** $\rightarrow$ **$x = 1$**

und stufenweise zurückrechnen.

97.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2x + 2y + 2z & = & -10 \\ \text{II} & 2x + 2y - 2z & = & 6 \\ \text{III} & 2x - 2y + 2z & = & -18 \end{array}$$

98.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} & = & \frac{2}{3} \\ \text{II} & \frac{x}{4} + \frac{y}{5} - \frac{z}{6} & = & \frac{59}{60} \\ \text{III} & \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} & = & \frac{3}{4} \end{array}$$

99.) Es werden zwei Sorten Alkohol gemischt. Der Alkohol der Sorte 1 ist 40 %-ig. Die Mischung enthält 50 Liter 34 %-igen Alkohol. Vertauscht man beide Mengen, so ergibt sich eine Mischung mit 36 %-igem Alkohol.

Wie viel Prozent Alkohol enthält die Sorte 2?

100.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| I | $-5a - b + 2c$ | $=$ | $-20$ |
| II | $2a + b - 4c$ | $=$ | $-1$ |
| III | $-a + 3b + c$ | $=$ | $1$ |

a =

b =

c =

101.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 4a - 7c & = & -91 \\ \text{II} & -3a + 3b + 2c & = & 38 \\ \text{III} & -2a - 4c & = & -52 \end{array}$$

a =
b =
c =

102.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 11a + 2b - c & = & 72 \\ \text{II} & -4a + 2b - 2c & = & -66 \\ \text{III} & 6a - 12b + 10c & = & 228 \end{array}$$

a =
b =
c =

103.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 2a - 2b + 16c & = & 50 \\ \text{II} & 18a + 21b + 24c & = & 12 \\ \text{III} & a - 7b + 9c & = & 40 \end{array}$$

a =
b =
c =

104.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 5a - b - 9c & = & -70 \\ \text{II} & 6a - 9b + 3c & = & -15 \\ \text{III} & 2a + 6b - c & = & -15 \end{array}$$

a =
b =
c =

105.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & a + 4{,}5b - 2c & = & 18 \\ \text{II} & 2a + \frac{1}{4} \cdot b + c & = & 11 \\ \text{III} & -6a - 4b + 7c & = & 31 \end{array}$$

a =
b =
c =

106.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 3a + 2b + 3{,}5c & = & 66 \\ \text{II} & a - c & = & 1 \\ \text{III} & -a + 4b + 4{,}5c & = & 68 \end{array}$$

a =
b =
c =

107.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & a - b + c & = & 4 \\ \text{II} & -2a - 3b - 1{,}5c & = & 10 \\ \text{III} & -1{,}6a - b + c & = & 17 \end{array}$$

a =
b =
c =

Die linearen Gleichungssysteme mit vier Variablen

Um ein lineares Gleichungssystem mit vier Variablen (Unbekannten) lösen zu können, benötigt man vier unabhängige Gleichungen.

Der **Gaußsche Algorithmus** (auch: Gaußsches Eliminationsverfahren) dient der Lösung linearer Gleichungssysteme.
Mit seiner Hilfe wird durch schrittweises Eliminieren von Variablen aus einem gegebenen Gleichungssystem ein System in gestaffelter Form erzeugt, aus dem rückwärts rechnend die Variablen bestimmt werden können.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 6 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Gleichung 2 als Eliminationsgleichung festlegen

Ziel: Variable $x_1$ eliminieren

Zunächst soll mithilfe der ersten Gleichung, der sog. Eliminationsgleichung, die Variable $x_1$ aus den anderen drei Gleichungen eliminiert werden. Dazu ist die Eliminationsgleichung nacheinander mit den Faktoren 2, 4 und 2 zu multiplizieren und anschließend jeweils zu den übrigen Gleichungen zu addieren.

$$\begin{aligned} \boxed{-x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 6} &\quad | \bullet 2 \quad | \bullet 4 \quad | \bullet 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Eliminationsgleichung nacheinander mit den o. g. Faktoren multiplizieren und zu den folgenden Gleichungen addieren

$$\begin{aligned} 2x_2 + 10x_3 \phantom{- 2x_4} &= 18 \\ -2x_2 + 12x_3 - 2x_4 &= 30 \\ -x_2 + 6x_3 - 3x_4 &= 19 \end{aligned}$$

Gleichung 3 als Eliminationsgleichung festlegen

Ziel: Variable $x_2$ eliminieren

Nun ist es nur noch ein lineares Gleichungssystem mit drei Variablen.
Als Eliminationsgleichung empfiehlt sich die dritte Gleichung:

$$\begin{aligned} \boxed{-x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 19} &\quad | \bullet 2 \quad | \bullet (-2) \\ 2x_2 + 10x_3 \phantom{- 2x_4} &= 18 \\ -2x_2 + 12x_3 - 2x_4 &= 30 \end{aligned}$$

Eliminationsgleichung nacheinander mit den o. g. Faktoren multiplizieren und zu den folgenden Gleichungen addieren

$$\begin{aligned} 22x_3 - 6x_4 &= 56 \\ 4x_4 &= -8 \end{aligned}$$

Gleichung 2 liefert das Ergebnis

$x_4 = -2$

Durch Einsetzen von $x_4 = -2$ in die Gleichung $22x_3 - 6x_4 = 56$ wird $x_3 = 2$ ermittelt.

Schließlich werden auch $x_2 = -1$, $x_1 = 1$ ermittelt.

108.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & a - b + c - 2d & = & 2 \\ \text{II} & 2a + b + 5c + d & = & 24 \\ \text{III} & -2a - 3b - 5c + 2d & = & -25 \\ \text{IV} & -6a - b + c + d & = & -16 \end{array}$$

a = 
b = 
c = 
d = 

109.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & a + b + 4c + 2d & = & 8 \\ \text{II} & 2a + 2b + 2c + d & = & 4 \\ \text{III} & 2a + 3b + 2c + 2d & = & 7 \\ \text{IV} & 3a + b + 2c + d & = & 2 \end{array}$$

a = 
b = 
c = 
d = 

110.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & a + b + c + d & = & 10 \\ \text{II} & a + 2b + 2c + d & = & 15 \\ \text{III} & 2a + b + 3c + d & = & 17 \\ \text{IV} & 3a + b + 2c + d & = & 15 \end{array}$$

a = 
b = 
c = 
d = 

111.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & a + 2b + c + d & = & 5 \\ \text{II} & 4a + 3b + 2c + 2d & = & 6 \\ \text{III} & 2a + 4b + 3c + d & = & 14 \\ \text{IV} & 3a + 5b + 2c + 3d & = & 10 \end{array}$$

a = 
b = 
c = 
d = 

112.)

$$\begin{array}{lrcl} \text{I} & 4a + 3b + 2c + 3d & = & 10 \\ \text{II} & 4a + 2b + 3c + 2d & = & 10 \\ \text{III} & 2a + 4b + 3c + 3d & = & 11 \\ \text{IV} & 3a + 5b + 2c + 2d & = & 5 \end{array}$$

a = 
b = 
c = 
d = 

## Die linearen Gleichungssysteme mit fünf Variablen

Um ein lineares Gleichungssystem mit fünf Variablen lösen zu können, benötigt man fünf unabhängige Gleichungen.

**Beispiel:**

$$\begin{array}{rcl}
3A + 2B - C + 2D - 2E & = & 6 \\
2A + 2B + C + 2D + 2E & = & 3 \\
A - B + C + D - E & = & 6 \\
3A - 2B + C + D + E & = & 7 \\
A + B + C + D + E & = & 2
\end{array}$$

Gleichung 5 als Eliminationsgleichung festlegen

Ziel: Variable C eliminieren

$$\begin{array}{rcl}
\boxed{A + B + C + D + E = 2} & & \\
3A + 2B - C + 2D - 2E & = & 6 \\
2A + 2B + C + 2D + 2E & = & 3 \\
A - B + C + D - E & = & 6 \\
3A - 2B + C + D + E & = & 7
\end{array}$$

| •1 ; • (–1) ; • (–1) ; • (–1)
Eliminationsgleichung nacheinander mit den o. g. Faktoren multiplizieren und zu den folgenden Gleichungen addieren

---

$$\begin{array}{rcl}
4A + 3B + 3D - E & = & 8 \\
A + B + D + E & = & 1 \\
-2B - 2E & = & 4 \\
2A - 3B & = & 5
\end{array}$$

Gleichung 2 als Eliminationsgleichung festlegen

Ziel: Variable D eliminieren

$$\begin{array}{rcl}
\boxed{A + B + D + E = 1} & & \\
4A + 3B + 3D - E & = & 8 \\
-2B - 2E & = & 4 \\
2A - 3B & = & 5
\end{array}$$

| • (–3)
Eliminationsgleichung mit dem Faktor (–3) multiplizieren und mit neuer Gleichung 2 addieren

---

$$\begin{array}{rcl}
A - 4E & = & 5 \\
-2B - 2E & = & 4 \\
2A - 3B & = & 5
\end{array}$$

Gleichung 1 als Eliminationsgleichung festlegen

Ziel: Variable A eliminieren

$$\begin{array}{rcl}
\boxed{A - 4E = 5} & & \\
-2B - 2E & = & 4 \\
2A - 3B & = & 5
\end{array}$$

| • (–2)
Eliminationsgleichung mit dem Faktor (–2) multiplizieren und mit der Gleichung 3 addieren

---

$$\begin{array}{rcl}
-2B - 2E & = & 4 \\
-3B + 8E & = & -5
\end{array}$$

Gleichung 1 als Eliminationsgleichung festlegen

Ziel: Variable E eliminieren

$$\begin{array}{rcl}
\boxed{-2B - 2E = 4} & & \\
-3B + 8E & = & -5
\end{array}$$

| • 4
Eliminationsgleichung mit dem Faktor 4 multiplizieren und mit der Gleichung 2 addieren

---

$$-11B = 11$$

→ B = –1
→ A = 1, C = 1, D = 2, E = –1

Die selbe Aufgabe lässt sich auch anders lösen, indem die erste Gleichung als Eliminationsgleichung verwendet und C als zu eliminierende Variable festgelegt wird.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} 3A + 2B - C + 2D - 2E &=& 6 \\ 2A + 2B + C + 2D + 2E &=& 3 \\ A - B + C + D - E &=& 6 \\ 3A - 2B + C + D + E &=& 7 \\ A + B + C + D + E &=& 2 \end{array}$$

Gleichung 1 als Eliminationsgleichung festlegen

Ziel: Variable C eliminieren

$$\begin{array}{rcl} 3A + 2B - C + 2D - 2E &=& 6 \\ 2A + 2B + C + 2D + 2E &=& 3 \\ A - B + C + D - E &=& 6 \\ 3A - 2B + C + D + E &=& 7 \\ A + B + C + D + E &=& 2 \end{array}$$

Eliminationsgleichung nacheinander mit den folgenden Gleichungen addieren

$$\begin{array}{rcl} 5A + 4B + 4D &=& 9 \\ 4A + B + 3D - 3E &=& 12 \\ 6A + 3D - E &=& 13 \\ 4A + 3B + 3D - E &=& 8 \end{array}$$

Gleichung 2 als Eliminationsgleichung festlegen

Ziel: Variable B eliminieren

$$\begin{array}{rcl} 4A + B + 3D - 3E &=& 12 \\ 5A + 4B + 4D &=& 9 \\ 4A + 3B + 3D - E &=& 8 \\ 6A + 3D - E &=& 13 \end{array}$$

| • (–4) ; • (–3)

Eliminationsgleichung mit den Faktoren multiplizieren und mit Gleichungen 2 und 3 addieren.

$$\begin{array}{rcl} -11A - 8D + 12E &=& -39 \\ -8A - 6D + 8E &=& -28 \\ 6A + 3D - E &=& 13 \end{array}$$

Gleichung 3 als Eliminationsgleichung festlegen

Ziel: Variable E eliminieren

$$\begin{array}{rcl} 6A + 3D - E &=& 13 \\ -11A - 8D + 12E &=& -39 \\ -8A - 6D + 8E &=& -28 \end{array}$$

| • 12 ; • 8

Eliminationsgleichung mit den Faktoren multiplizieren und mit Gleichungen 2 und 3 addieren.

$$\begin{array}{rcl} 61A + 28D &=& 117 \\ 40A + 18D &=& 76 \end{array}$$

lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen

Dieses lineare Gleichungssystem mit den beiden Variablen A und D kann mit den üblichen mathematischen Verfahren (Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren und Einsetzungsverfahren) gelöst werden.

$\rightarrow$ A = 1
$\rightarrow$ D = 2

Durch Einsetzen der ermittelten Werte für die Variablen A = 1 und D = 2 in die Gleichung 6 A + 3 D – E = 13 wird E = –1 ermittelt.

Schließlich werden – ebenfalls durch Einsetzen der ermittelten Werte in weiter oben stehende Gleichungen – die Variablen B = –1 und C = 1 ermittelt.

113.)

| | | |
|---|---|---|
| I | $2a + 2b + c + d + 5e = -5$ | $a =$ |
| II | $3a + 3b + 2c + 2d + 4e = -5$ | $b =$ |
| III | $6a + 4b + 3c + 4d + 6e = -12$ | $c =$ |
| IV | $5a + 6b + 4c + 3d + 2e = -1$ | $d =$ |
| V | $4a + 5b + 5c + 5d + 3e = -7$ | $e =$ |

114.)

| | | |
|---|---|---|
| I | $2a + 2b - 2c + 2d + 6e = 18$ | $a =$ |
| II | $6a + 3b - 3c + 3d + 4e = 20$ | $b =$ |
| III | $3a + 6b - 5c + 4d + 5e = 22$ | $c =$ |
| IV | $5a + 4b - 4c + 3d + 2e = 13$ | $d =$ |
| V | $4a + 5b - 3c + 5d + 3e = 30$ | $e =$ |

115.)

| | | |
|---|---|---|
| I | $\frac{a}{2} + 2b + \frac{8c}{4} + \frac{d}{2} + \frac{e}{3} = 1$ | $a =$ |
| II | $2a + 3b + 4c + 2d + e = 4$ | $b =$ |
| III | $a + \frac{3b}{2} + 2c + d + \frac{e}{2} = 2$ | $c =$ |
| IV | $\frac{a}{8} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} + d + e = 5$ | $d =$ |
| V | $2a - 4b + \frac{c}{2} - \frac{d}{4} + \frac{e}{3} = 1$ | $e =$ |
| VI | $\frac{a}{2} - b - c + \frac{d}{2} + \frac{e}{2} = 1{,}5$ | |

116.)

| | | |
|---|---|---|
| I | $\frac{A}{2} + \frac{B}{4} - \frac{C}{2} - \frac{D}{4} + 2E = 2$ | $A =$ |
| II | $A + B - C - D + E = 3$ | $B =$ |
| III | $\frac{A}{3} - \frac{B}{3} + C - D + 2E = 4$ | $C =$ |
| IV | $\frac{A}{4} - \frac{3B}{8} - C + \frac{D}{2} + E = -2$ | $D =$ |
| V | $3A - 6B + 3C - 5D + E = -1$ | $E =$ |