Das Integralrechnen

1 Das Integralrechnen mit Integrationsgrenzen

Mithilfe der Integralrechnung können Flächeninhalte berechnet werden, z. B. zwischen mehreren Funktionen oder unterhalb einer Funktion.

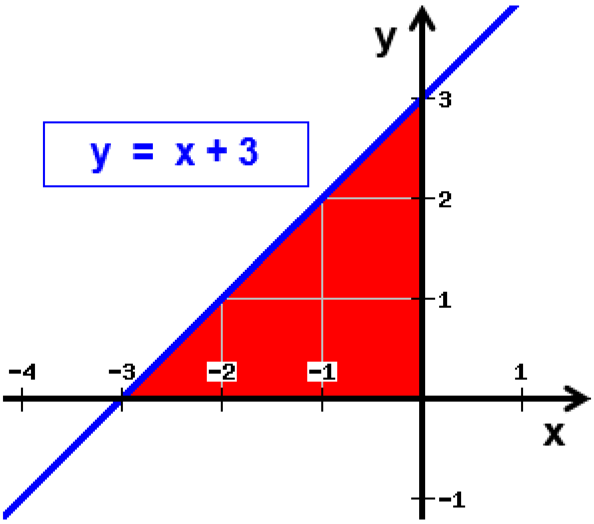
① $A = \int_{-3}^{0} (x + 3)\, dx$

② $= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-3}^{0}$

③ $= (½•0^2 + 3•0) – (½•(–3)^2 + 3•(–3))$

$= \quad 0 \quad – (½ • 9 \quad – \quad 9 \quad)$

$=$ **4,5 FE**



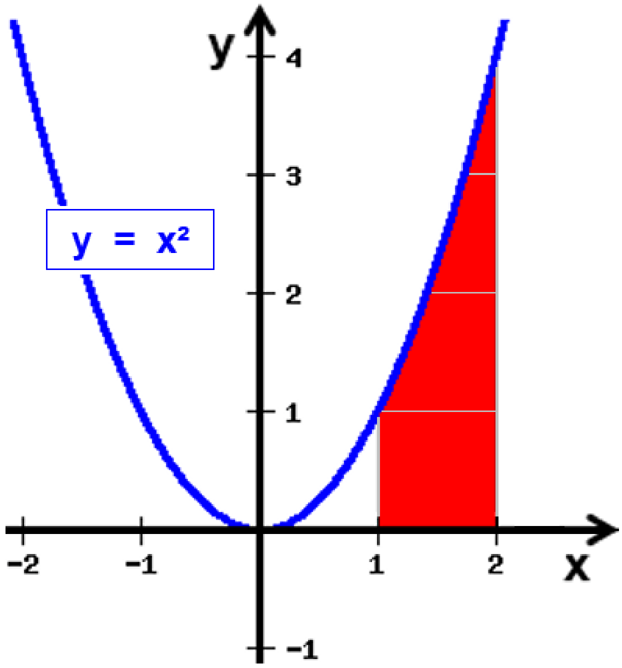
Arbeitsschritte beim Integrieren:

① Die Funktion **y = x + 3** integrieren. (Ergebnis: $½x^2 + 3x$)

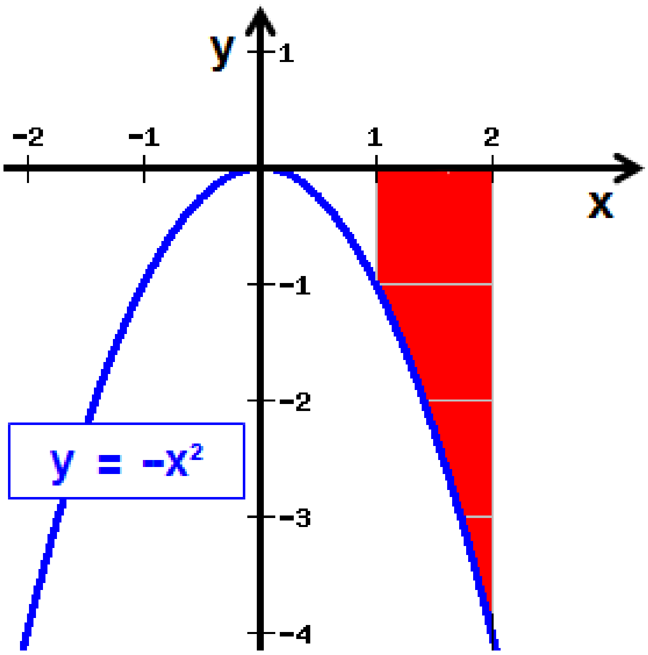
② Diese Stammfunktion (hier: $½x^2 + 3x$) wird in eckige Klammern gesetzt und mit den Integrationsgrenzen versehen.
Im Beispiel ist die obere Grenze = 0 und die untere Grenze = –3.

③ Funktion mit den beiden Integrationsgrenzen ausrechnen.

1.) Berechnen Sie für das Intervall $1 \leq x \leq 2$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^2$ und der x-Achse!



2.) Berechnen Sie für das Intervall $1 \leq x \leq 2$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = -x^2$ und der x-Achse!



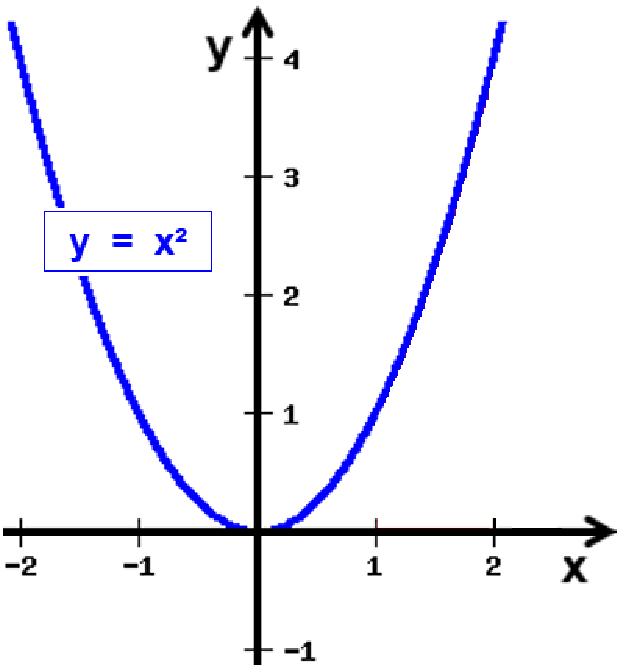
2 Der Unterschied zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral

Ein unbestimmtes Integral besitzt keine Integrationsgrenzen, die Lösung einer Aufgabe mit einem unbestimmten Integral ist eine Stammfunktion.

Beispiel:
Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = x^2$** und der x-Achse!

$$A = \int x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]$$



Ein bestimmtes Integral besitzt Integrationsgrenzen, die Lösung einer Aufgabe mit einem bestimmten Integral ist ein einfacher Zahlenwert.

$$A = \int_1^2 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + C\right]_1^2$$

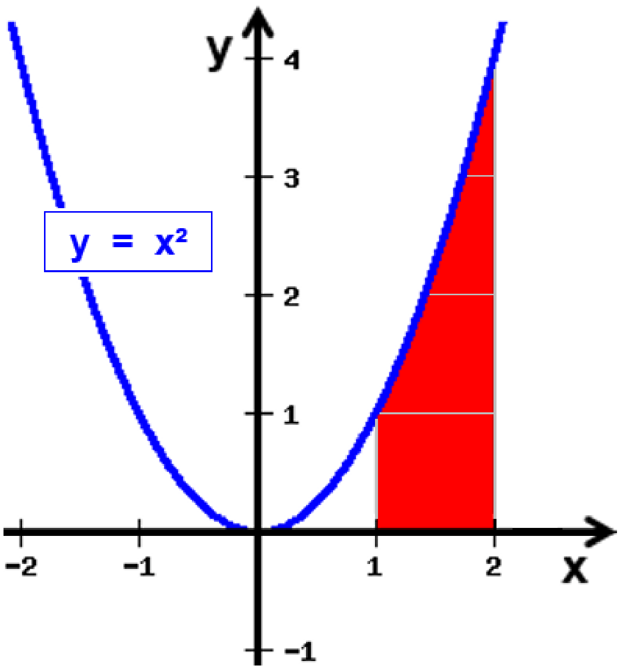
$$= {}^1/_3 \cdot 2^3 + C - ({}^1/_3 \cdot 1^3 + C)$$

$$= {}^8/_3 + C - {}^1/_3 - C$$

$$= {}^7/_3$$

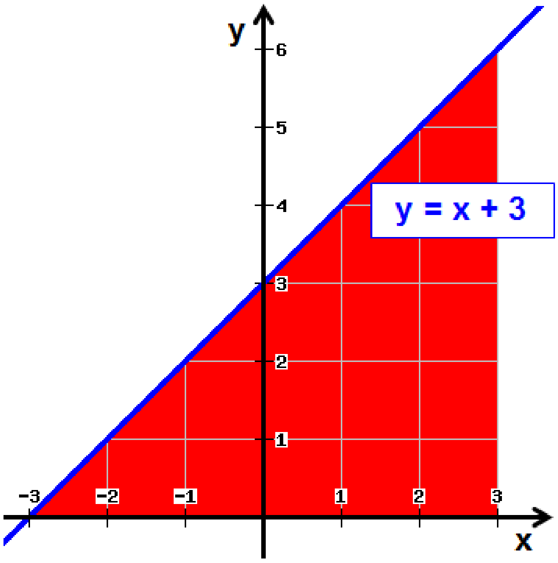
$$= \mathbf{2\,{}^1/_3\ FE}$$

Beim bestimmten Integral hat die additive Konstante C keinen Einfluss auf den Zahlenwert.

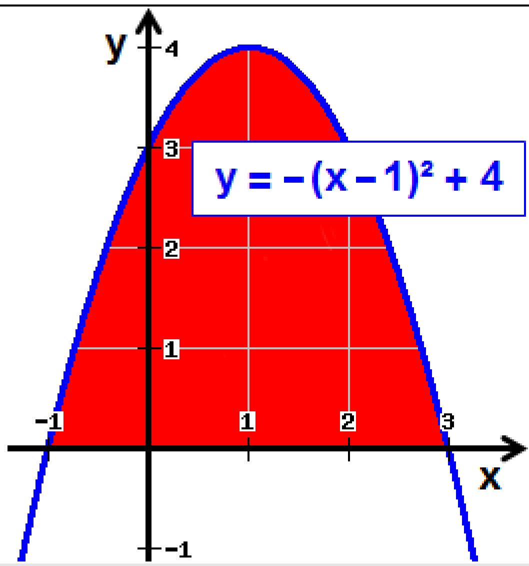


3 Der Wechsel über die x-Achse beim bestimmten Integral

3.) | Berechnen Sie für das Intervall $-3 \le x \le 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $\mathbf{y = x + 3}$ und der x-Achse!



4.) | Berechnen Sie für das Intervall $-1 \le x \le 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $\mathbf{y = -(x - 1)^2 + 4}$ und der x-Achse!



5.) Berechnen Sie für das Intervall $-4 \le x \le 4$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = x + 2$** und der x-Achse!

Falsch!

$$A = \int_{-4}^{4} (x + 2)\, dx$$

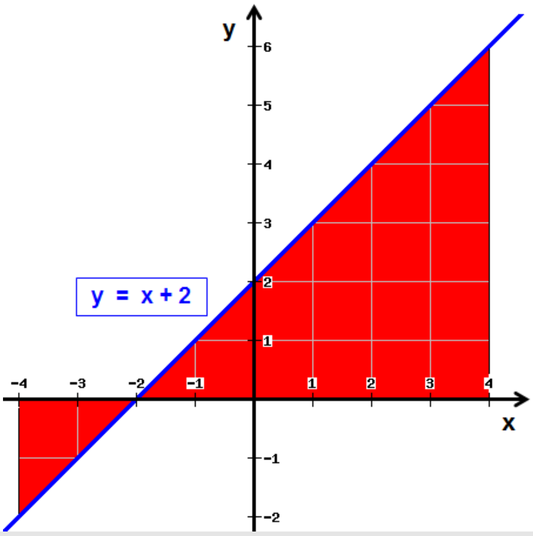
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-4}^{4}$$

$$= (\tfrac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4) - (\tfrac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4))$$

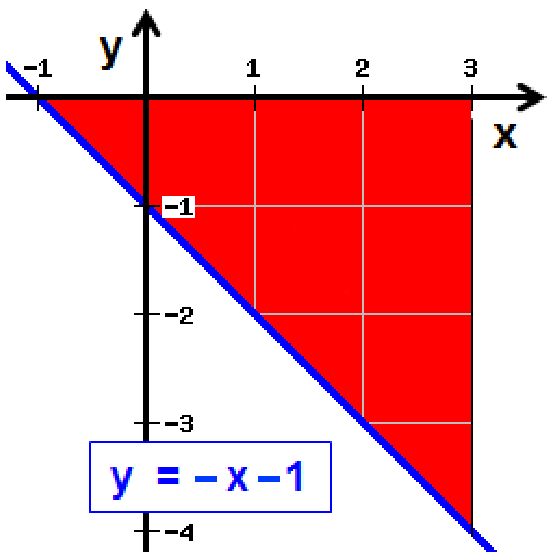
$$= (\ 8 \ + \ 8\ ) - (\ 8 \ - \ 8\ )$$

$$= \quad 16 \quad - \quad 0$$

$= \mathbf{16\ FE}$ **Falsch!**



6.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \le x \le 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = -x - 1$** und der x-Achse!



7.) Berechnen Sie für das Intervall –3 ≤ x ≤ 3 den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = -x - 1$** und der x-Achse!

Falsch!

$A = \int_{-3}^{3}(-x-1)\,dx$

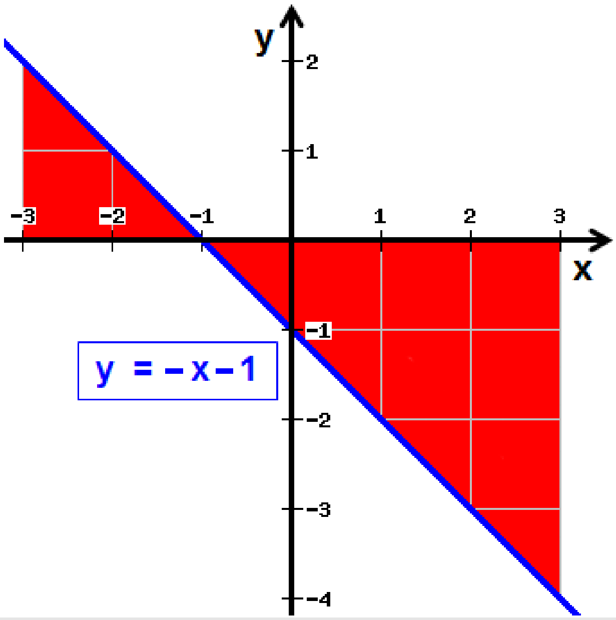
$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-3}^{3}$

$= (-\frac{1}{2}\cdot 3^2 - 3) - (-\frac{1}{2}\cdot(-3)^2 - (-3))$

$= \quad -7{,}5 \quad + \quad 1{,}5$

$= \quad |-6|$

$=$ **6 FE** **Falsch!**



Achtung beim Wechsel über die x-Achse!

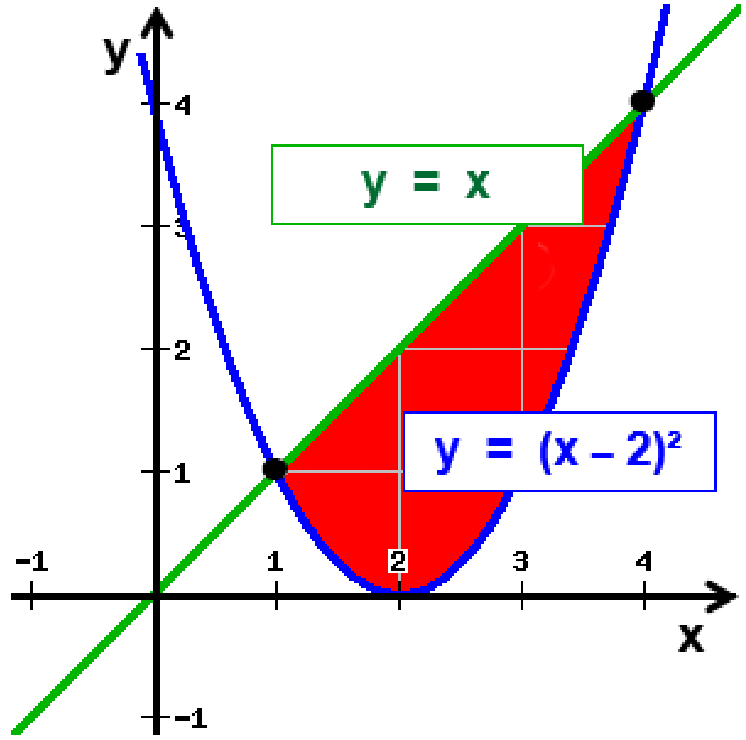
8.) Berechnen Sie folgende Integrale!

a) $\int_{-2}^{0} x\,dx =$

b) $\int_{0}^{2} x^2\,dx =$

c) $\int_{-1}^{2}(2-x)\,dx =$

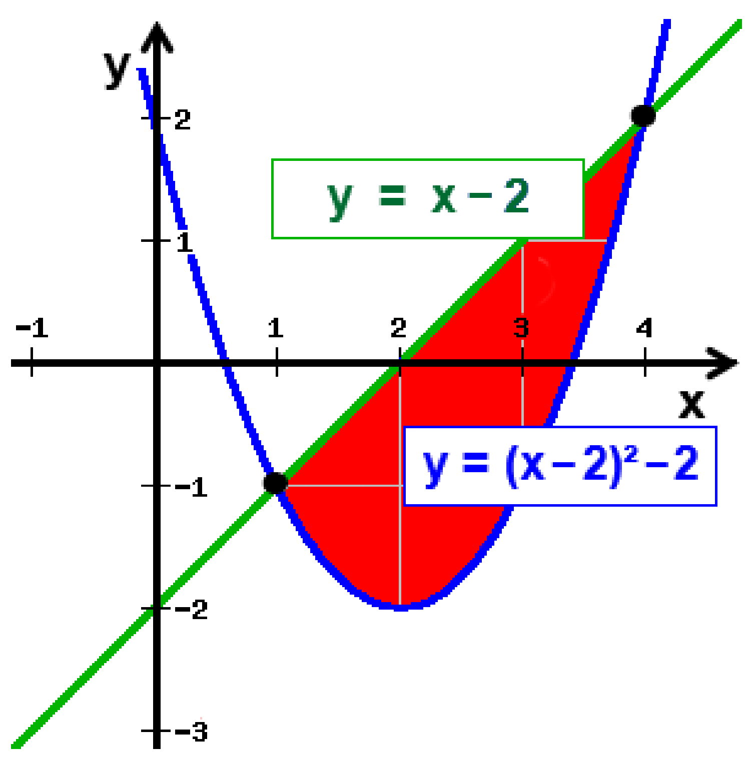
9.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen $y = (x - 2)^2$ und $y = x$ eingeschlossen wird!



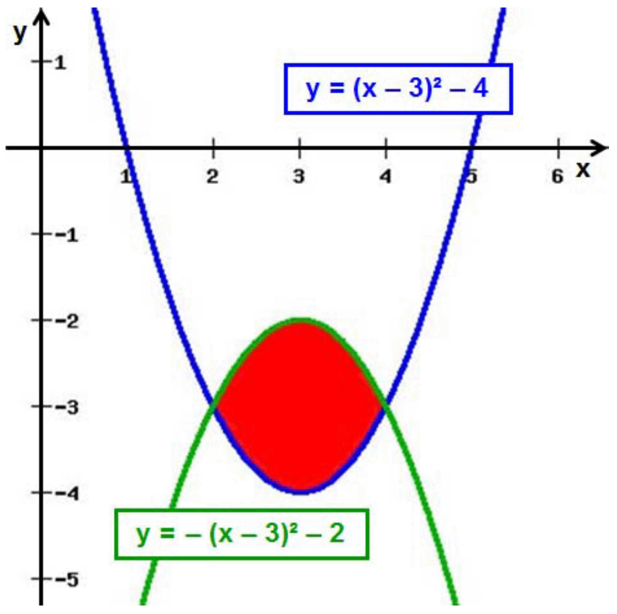
.)

Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen

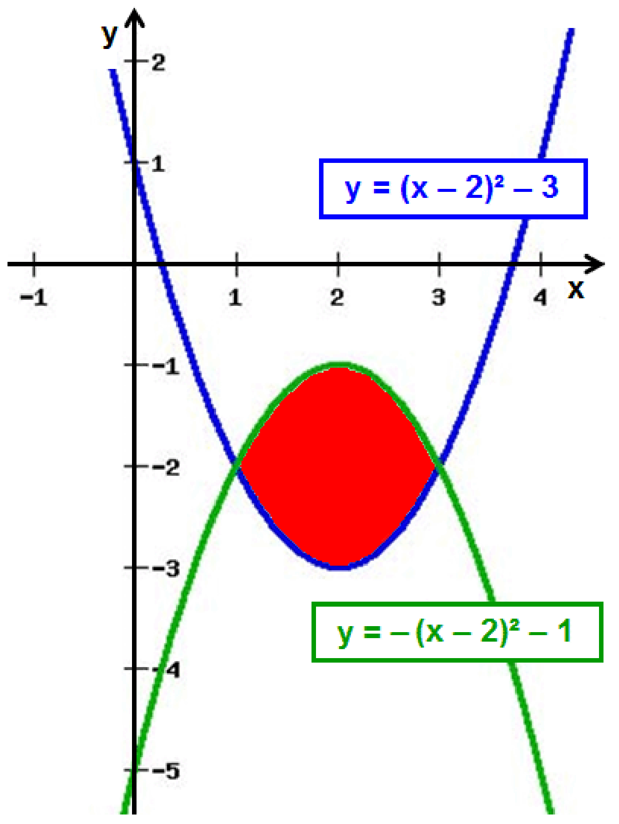
$y = (x - 2)^2 - 2$ und $y = x - 2$ eingeschlossen wird!



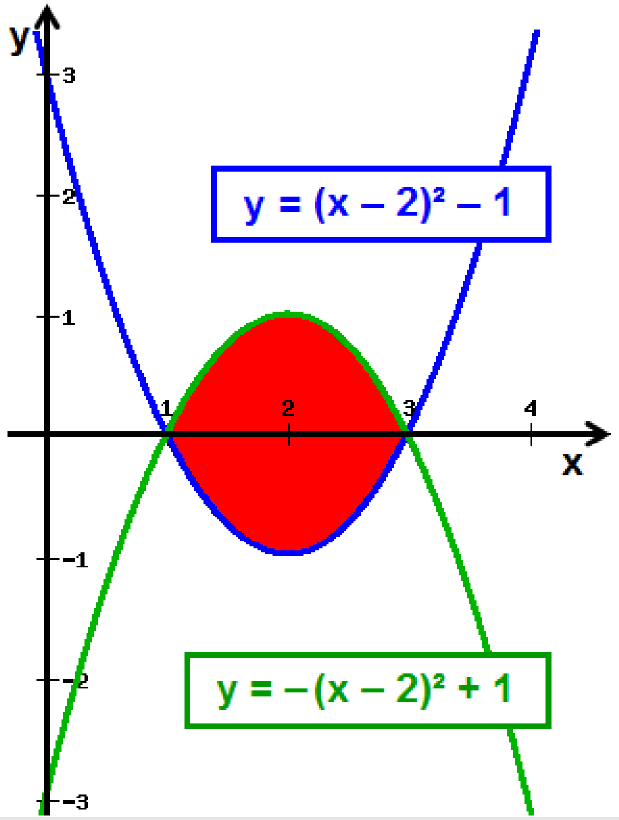
10.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen $y = (x - 3)^2 - 4$ und $y = -(x - 3)^2 - 2$ eingeschlossen wird!



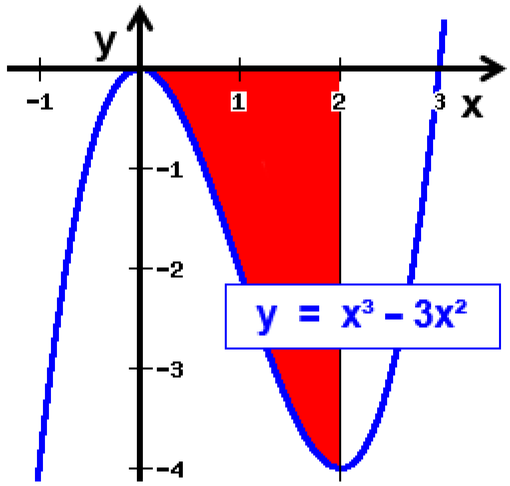
11.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen $y = (x - 2)^2 - 3$ und $y = -(x - 2)^2 - 1$ eingeschlossen wird!



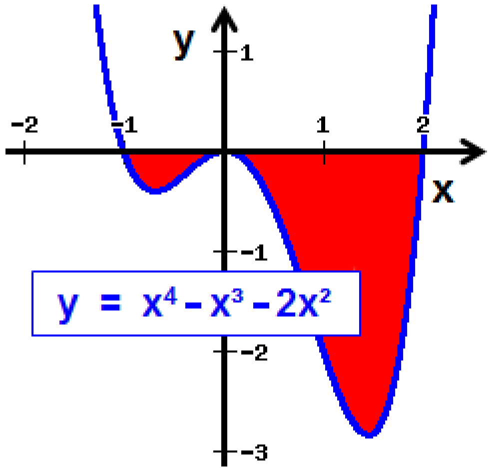
12.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen $y = (x - 2)^2 - 1$ und $y = -(x - 2)^2 + 1$ eingeschlossen wird!



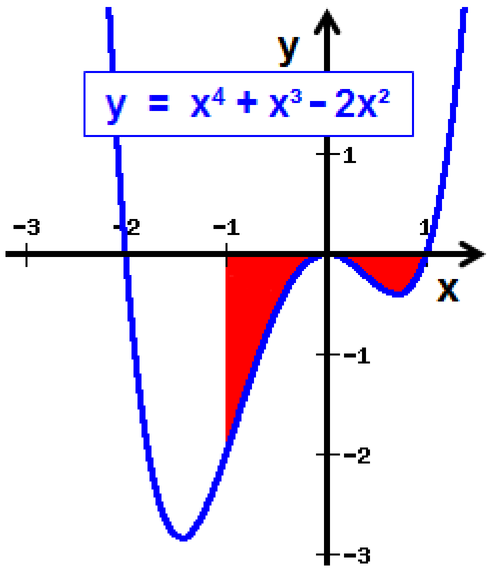
13.) Berechnen Sie für das Intervall $0 \le x \le 2$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^3 - 3x^2$ und der x-Achse!



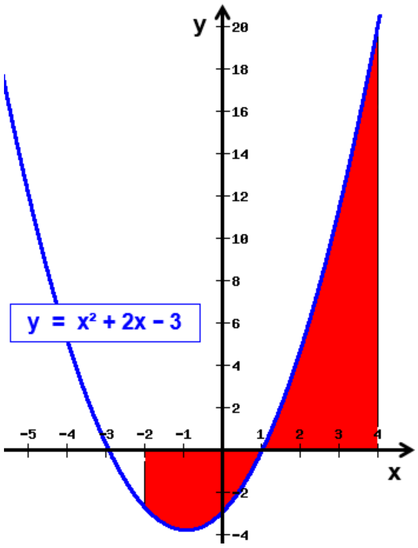
14.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \le x \le 2$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^4 - x^3 - 2x^2$ und der x-Achse!



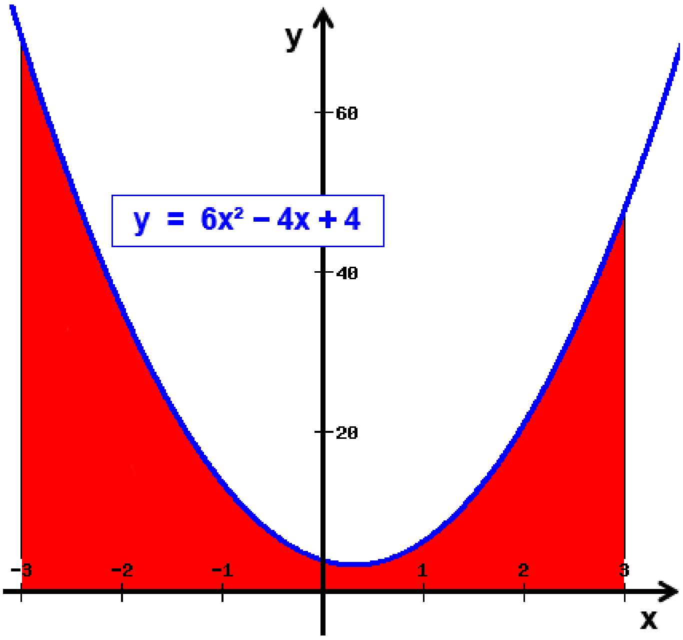
15.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \leq x \leq 1$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^4 + x^3 - 2x^2$ und der x-Achse!



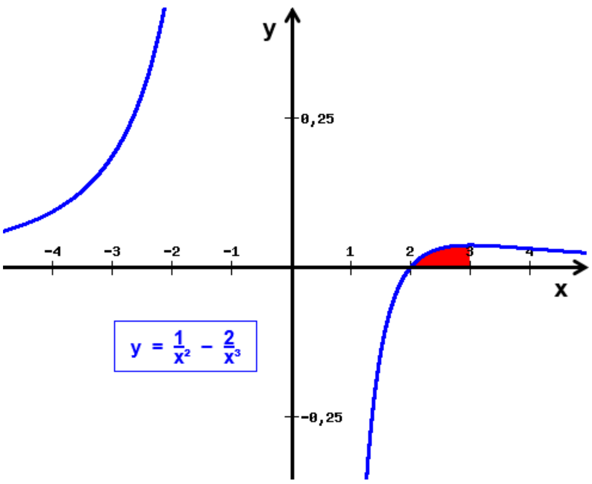
16.) Berechnen Sie für das Intervall $-2 \leq x \leq 4$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^2 + 2x - 3$ und der x-Achse!



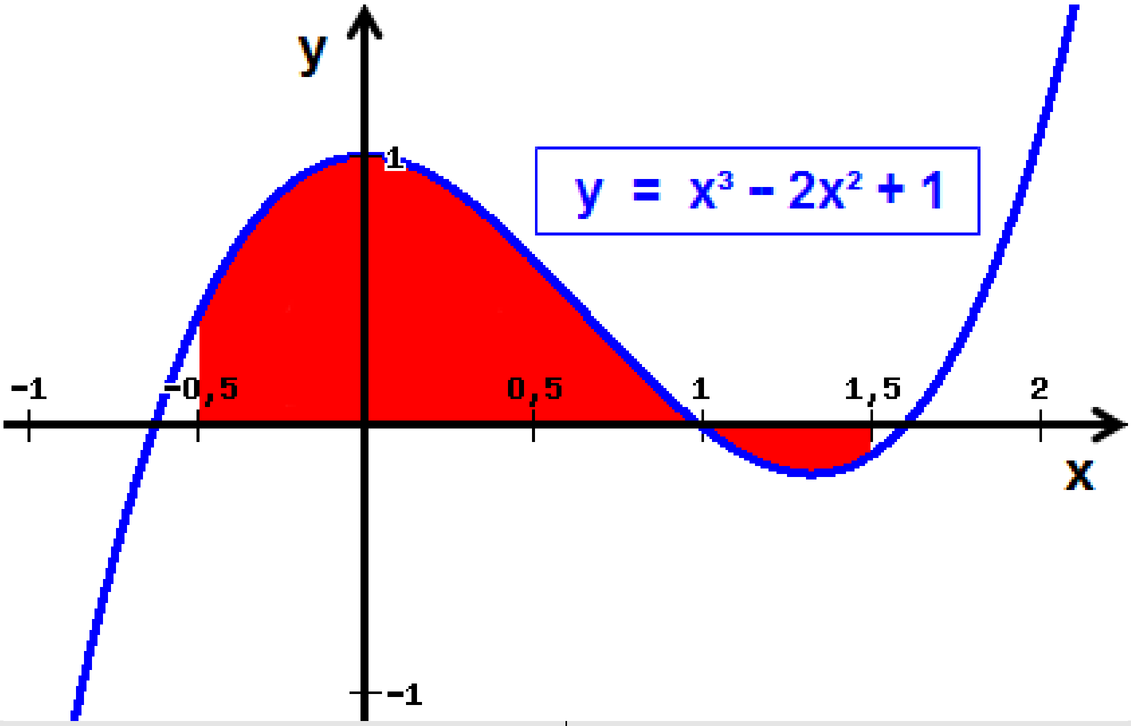
17.) Berechnen Sie für das Intervall $-3 \leq x \leq 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = 6x^2 - 4x + 4$ und der x-Achse!



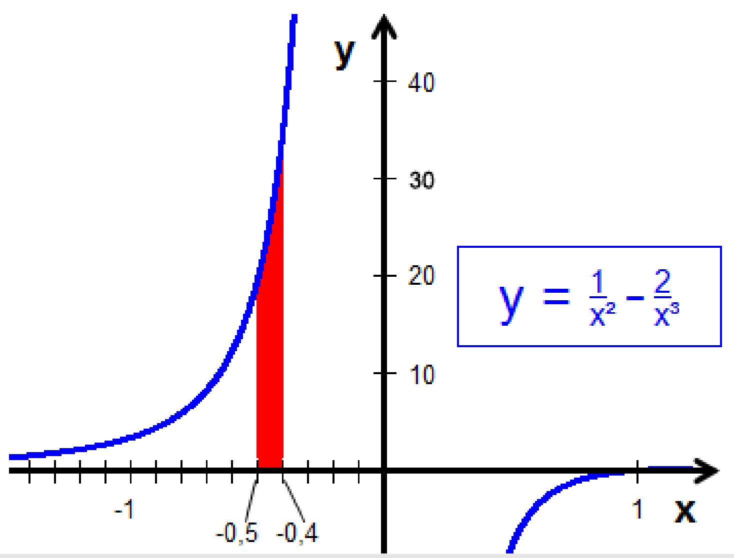
18.) Berechnen Sie für das Intervall $2 \leq x \leq 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = {}^{1}/_{x^2} - {}^{2}/_{x^3}$ und der x-Achse!



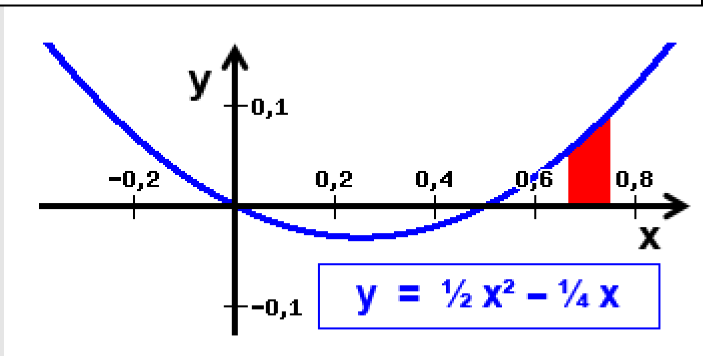
19.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^3 - 2x^2 + 1$ und der x-Achse!



20.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \le x \le -0{,}4$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = {}^1/_{x^2} - {}^2/_{x^3}$ und der x-Achse!



21.) Berechnen Sie für das Intervall ${}^2/_3 \le x \le {}^3/_4$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x$ und der x-Achse!



22.) Berechnen Sie jeweils die obere Integrationsgrenze für folgende Intervalle!

a) $\int_3^x (2t - 4)\, dt = 8$

b) $\int_2^x 3t^2\, dt = 56$

23.) Berechnen Sie jeweils die obere Integrationsgrenze für folgende Intervalle!

Hinweis: Eine 0 Einheiten große Fläche erhält man bei identischer unterer und oberer Integrationsgrenze oder wenn Teilflächen oberhalb und unterhalb durch die x-Achse begrenzt werden.

a) $\int_{-3}^{x} (2t + 2)\, dt = 5$

b) $\int_{0}^{x} (2t^2 - t)\, dt = 0$

c) $\int_1^x (3t^2 - 2t - 3)\,dt \; = \; 0$

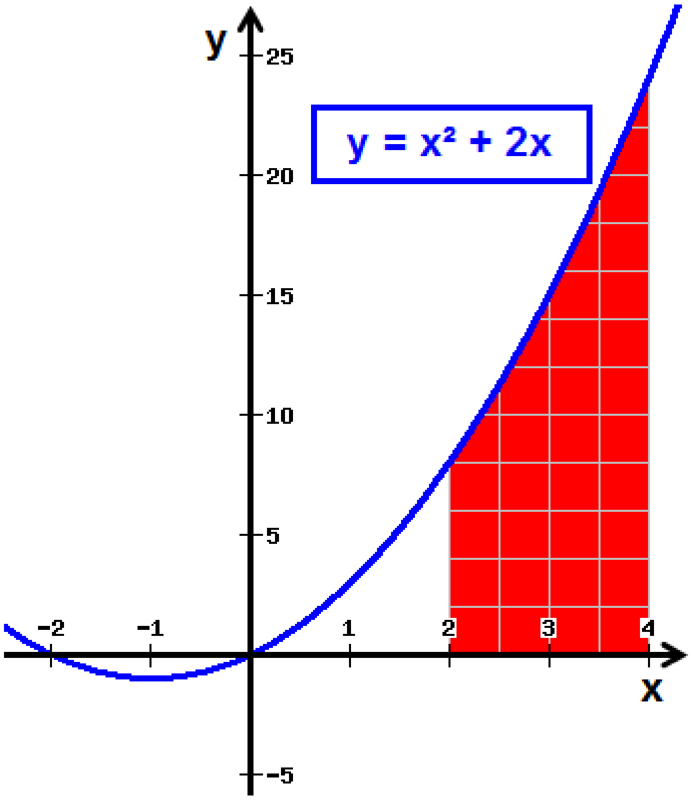
24.) Berechnen Sie die folgenden Flächeninhalte!

a) $\int_{-2}^{2} \mathbf{ax}\,\mathbf{dx}$

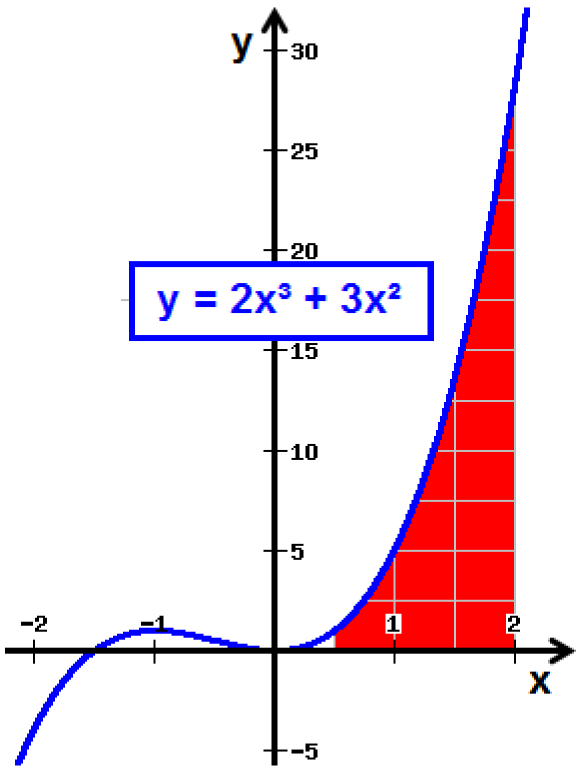
b) $\int_{2}^{2a} \mathbf{ax^2}\,\mathbf{dx}$

c) $\int_{3}^{4} (-\mathbf{x^2} + \mathbf{4x})\,\mathbf{dx}$

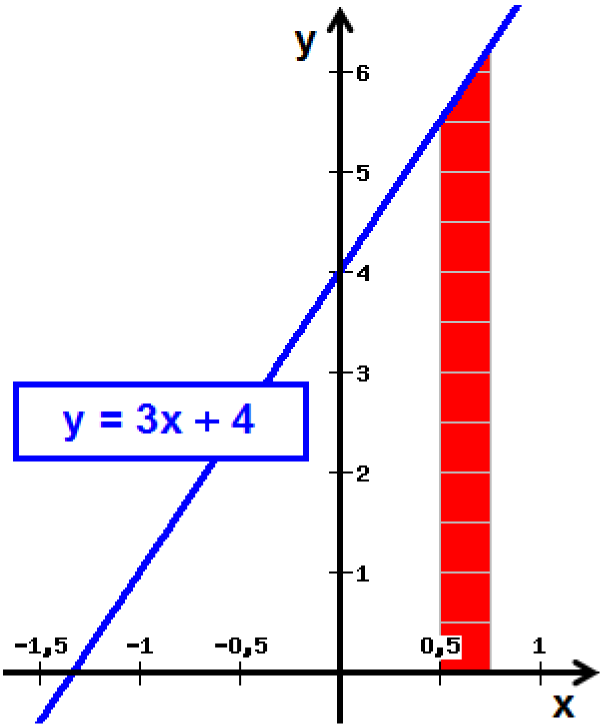
25.) Berechnen Sie für $\int_2^4 (x^2 + 2x)\,dx$ den Flächeninhalt!



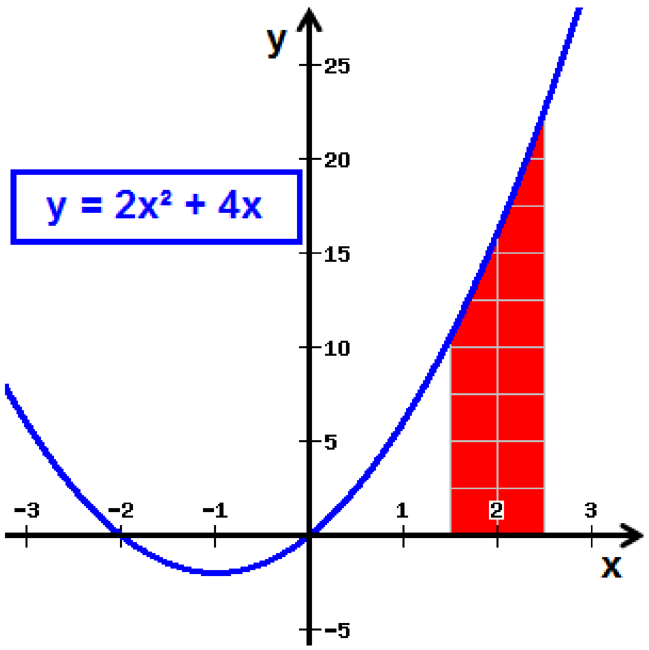
26.) Berechnen Sie für $\int_{0,5}^2 (2x^3 + 3x^2)\,dx$ den Flächeninhalt!



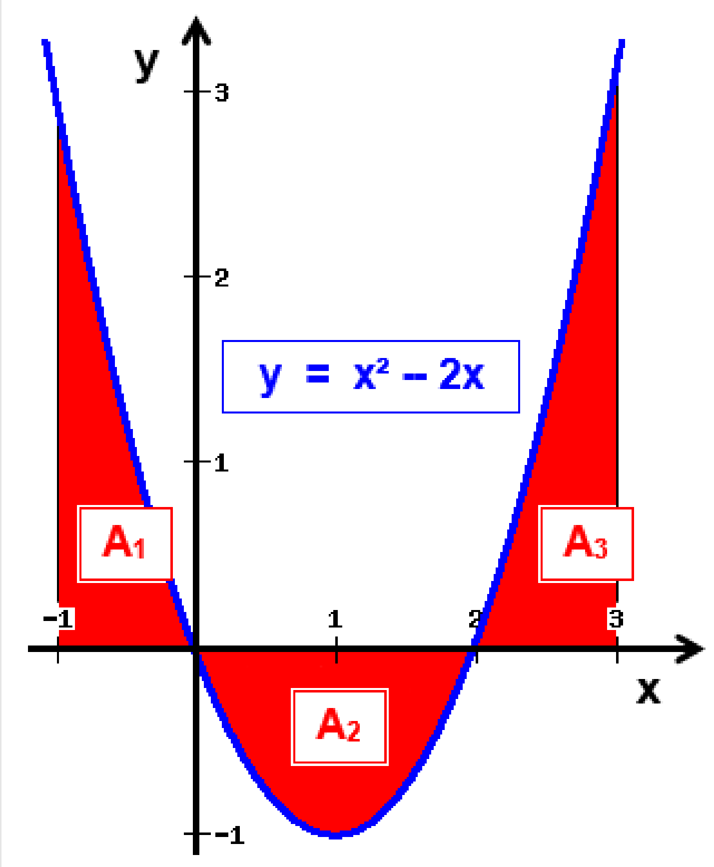
27.) Berechnen Sie für $\int_{0,5}^{0,75}(3x+4)\,dx$ den Flächeninhalt!



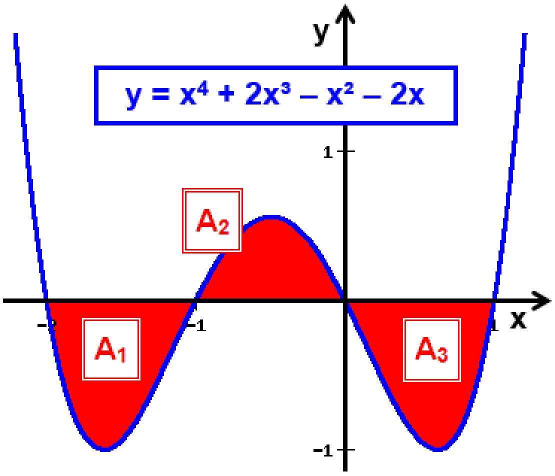
28.) Berechnen Sie für $\int_{1,5}^{2,5}(2x^2+4x)\,dx$ den Flächeninhalt!



29.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \leq x \leq 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^2 - 2x$ und der x-Achse!



30.) Berechnen Sie für das Intervall $-2 \leq x \leq +1$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ = $(x + 2) \cdot (x + 1) \cdot x \cdot (x - 1)$ und der x-Achse!



31.) Berechnen Sie für das Intervall $-2{,}5 \leq x \leq +0{,}5$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $\mathbf{y = -x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x} = (-x^2 - 5x - 6) \cdot (x^2 - x)$ und der x-Achse!

32.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen $y = x^2 - 2x$ und $y = x$ eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

33.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = -x^2 + 3$** und **$y = -2x$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

34.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen $\mathbf{y = x + 1}$ und $\mathbf{y = \frac{1}{2} x^2 - x - 1{,}5}$ eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

35.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$ die durch die Funktion

$y = x^2 - 2x - 3$ und die x-Achse eingeschlossene Fläche!

Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der Funktion!

36.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von den beiden Funktionen $y = 2x^3$ und $y = 3x^2 - 1$ eingeschlossen wird!
Berechnen Sie die Schnittpunkte beider Funktionen!

37.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von den beiden Funktionen $y = x^4 + x^2$ und $y = -x^2 + 3$ eingeschlossen wird!

38.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von den Funktionen $y = x^3 + x^2 - 4x - 4$ und $y = -x^3 - x^2 + 4x + 4$ eingeschlossen wird?

39.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von der Funktion

$y = x^3 - 1{,}5x^2 - 5\frac{1}{2}x + 3$ und der x-Achse zwischen der ersten Nullstelle und $x = +2$ eingeschlossen wird?

Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei $x = +\frac{1}{2}$.

40.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ die durch die Funktion
$y = 8x^4 + x^2 - 9$ und die x-Achse eingeschlossene Fläche!

41.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von der Funktion

$y = 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 6x$ und der x-Achse zwischen der ersten und der vierten Nullstelle eingeschlossen wird!

Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei $x = -1$.

42.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von der Funktion
$y = 0{,}75x^4 - 1{,}5x^3 - 0{,}75x^2 + 1{,}5x$ und der x-Achse zwischen der ersten und der vierten Nullstelle eingeschlossen wird!
Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei x = +**2**.

43.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von den beiden Funktionen **$y = 0{,}25x^3 - 2{,}5x^2 + 6{,}25x$** und **$y = 4{,}5 - 0{,}5x$** eingeschlossen wird?