Die komplexen Zahlen

1 Die „nicht lösbaren“ quadratischen Gleichungen

Für die Gleichung $x^2 = +1$ ergeben sich die zwei Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$, also zwei reelle Zahlen.

Für die Gleichung $\mathbf{x^2 = -1}$ scheint es keine Lösung zu geben, da der Wert unter der Wurzel kleiner Null (also negativ) ist.
Diese Feststellung betrifft aber nur den reellen Zahlenbereich.

Im Bereich der komplexen Zahlen ist die Gleichung $\mathbf{x^2 = -1}$ lösbar, indem man die **imaginäre Einheit i** einführt.

Es gilt:

$$\sqrt{-1} = \mathbf{i}$$

Hinweis zur Schreibweise:

Während in der Mathematik die Darstellung einer komplexen Zahl mithilfe des Buchstaben **i** üblich ist, nutzt die Elektrotechnik den Buchstaben **j** und setzt diesen im Imaginärteil voran, z. B. **z = 1 + j4**

1.) $$-51 = 3 \cdot (x^2 + 2x)$$

$$0 = 3x^2 + 6x + 51 \quad | :3$$

$$0 = x^2 + 2x + 17$$

$$x_{1/2} = -\frac{2}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{4} - 17}$$

$$= -1 \pm \sqrt{-16}$$

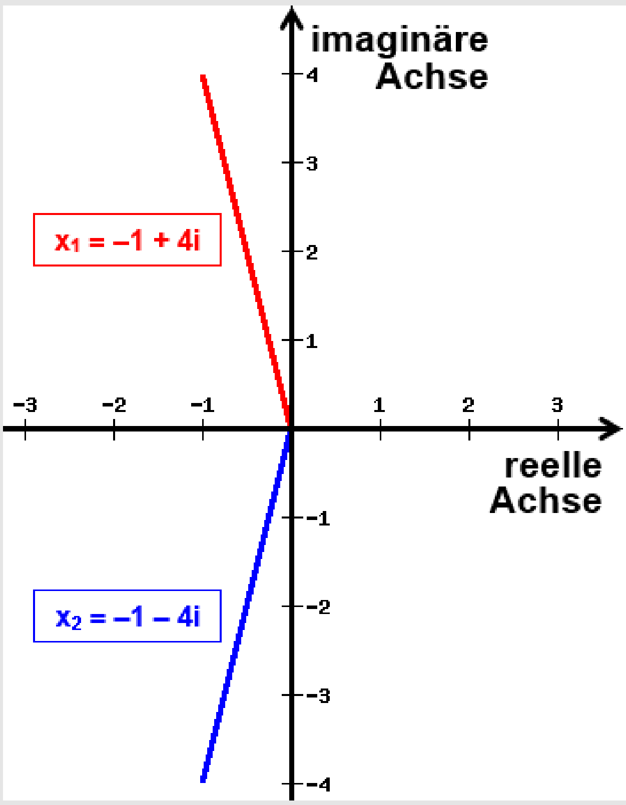
$$\rightarrow x_1 = \mathbf{-1 + 4i}$$
$$x_2 = \mathbf{-1 - 4i}$$

Die komplexe Zahl $x_1 = -1 + 4i$ besteht aus dem Realteil (auch: reeller Teil) -1
und dem Imaginärteil (auch: imaginärer Teil) $4i$.

Grafisch lassen sich die Zahlen

$\mathbf{x_1 = -1 + 4i}$ und $\mathbf{x_2 = -1 - 4i}$

so darstellen:



2.) $0 = x^2 - 2x + 10$

3.) $0 = 2a^2 + 4a + 10$

4.) $-16 \cdot (x^2 + 4x) = 73$

5.) $-4x^2 - 8 = -8x$

6.) $0 = 2x^2 - 2x + 25$

7.) $2{,}5x = 0{,}5x^2 + 4^{0{,}5}$

Potenzgesetze:

$a^1 = a$	Eine Potenz mit dem Exponenten 1 hat den Wert der Potenzzahl.
$b^0 = 1$	Eine Potenz mit dem Exponenten 0 hat den Wert 1.
$c^m \bullet c^n = c^{m+n}$	Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert.
$\frac{d^m}{d^n} = d^{m-n}$	Potenzen mit gleichen Basen werden dividiert, indem man ihre Exponenten subtrahiert.
$(e^m)^n = e^{m \bullet n}$	Potenzen werden potenziert, indem man ihre Exponenten multipliziert.
$f^m \bullet g^m = (fg)^m$	Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Basen multipliziert.
$h^{-n} = \frac{1}{h^n}$	eine Potenz mit negativem Exponenten
$i^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{i^m}$	eine Potenz mit einem Bruch als Exponent

8.) $0 = x^2 - 8 \bullet (x - 5) + 1$

9.) $0 = 4x^2 + 12x + 13$

10.) $x = 0{,}25x^2 + 2$

11.) Ermitteln Sie jeweils die Zahlenwerte!

a)	i		b)	i^2	
c)	i^3		d)	i^4	
e)	i^5		f)	i^6	
g)	i^7		h)	i^8	
i)	i^9		j)	i^{10}	
k)	i^{11}		l)	i^{12}	
m)	i^{100}		n)	i^{2014}	

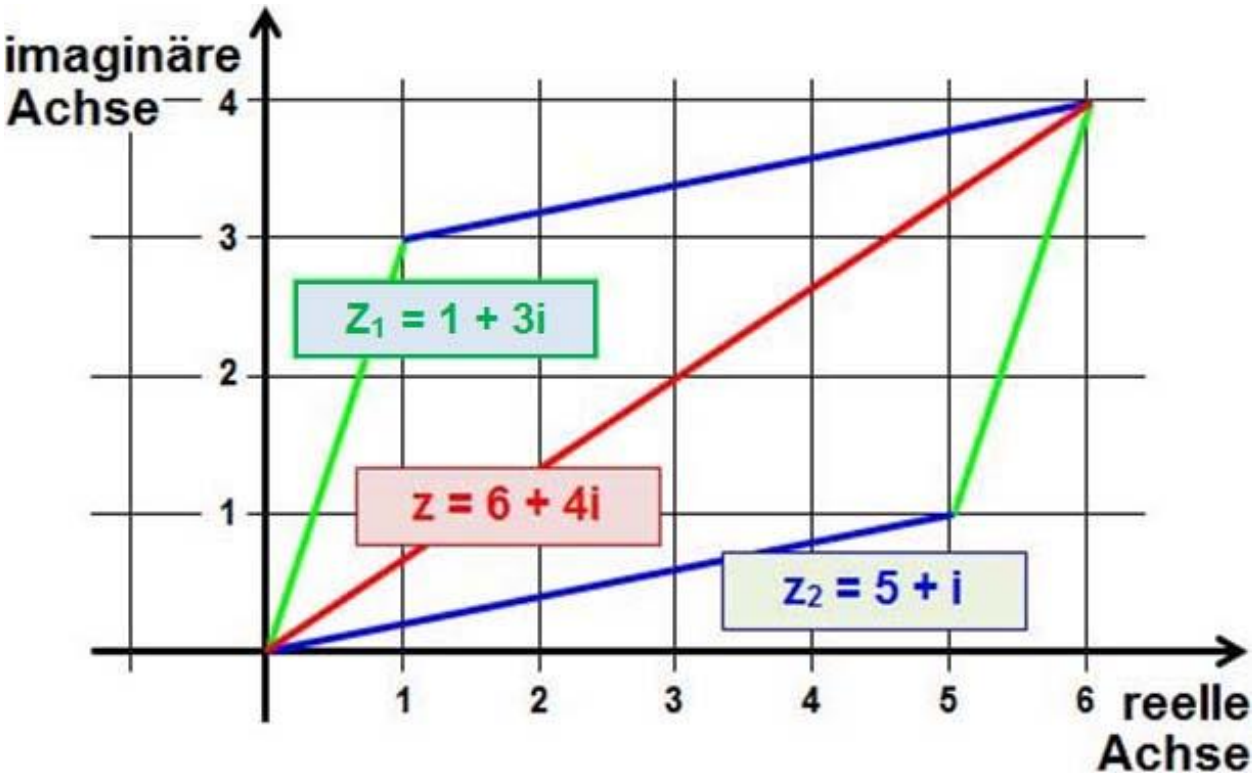
2 Das Addieren und das Subtrahieren von komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen werden komponentenweise addiert und subtrahiert.

$$z_1 = x_1 + y_1 \bullet i$$

$$z_2 = x_2 + y_2 \bullet i$$

$$\begin{aligned} z &= z_1 \pm z_2 \\ &= x_1 \pm x_2 + (y_1 \pm y_2) \bullet i \end{aligned}$$



12.) Gegeben sind $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = -4 - 2i$ und $z_4 = 5 - 3i$.
Berechnen Sie jeweils z!

a) $z = z_1 + z_2$		
b) $z = z_1 + z_3$		
c) $z = z_1 + z_4$		
d) $z = z_2 + z_3$		
e) $z = z_2 + z_4$		
f) $z = z_3 + z_4$		
g) $z = z_1 - z_2$		
h) $z = z_1 - z_3$		
i) $z = z_1 - z_4$		
j) $z = z_2 - z_3$		
k) $z = z_2 - z_4$		
l) $z = z_3 - z_4$		

13.) Berechnen Sie!

$$\left(\frac{5\alpha}{2} - \frac{7\beta}{6}i\right) - 4 \bullet \left(\frac{3\beta}{2} - \frac{2\beta}{3}i\right) - 3 \bullet \left(\frac{3\alpha}{6} - \frac{3\beta}{2}i\right)$$

14.) Berechnen Sie!

$$\left(\frac{5a}{2} - \frac{3b}{4}i\right) - 8 \bullet \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{4}i\right) - 4 \bullet \left(\frac{5a}{8} - \frac{3b}{4}i\right)$$

3 Das Multiplizieren von komplexen Zahlen

$z_1 = x_1 + y_1 \bullet i$

$z_2 = x_2 + y_2 \bullet i$

$$\begin{aligned} z &= z_1 \bullet z_2 \\ &= (x_1 + y_1 \bullet i) \bullet (x_2 + y_2 \bullet i) \\ &= x_1x_2 + x_1y_2 \bullet i + x_2y_1 \bullet i + y_1y_2 \bullet i^2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1) \bullet i \end{aligned}$$

Hinweis:
$i^2 = -1$

15.) Gegeben sind $z_1 = 2 - 4i$ und $z_2 = -3 - 5i$. Berechnen Sie $z = z_1 \bullet z_2$!

16.) Gegeben sind $z_1 = -3 - 4i$ und $z_2 = 4 - 5i$. Berechnen Sie $z = z_1 \bullet z_2$!

Es gelten die folgenden Rechengesetze:

Kommutativgesetz: $z_1 \bullet z_2 = z_2 \bullet z_1$

Assoziativgesetz: $z_1 \bullet (z_2 \bullet z_3) = (z_1 \bullet z_2) \bullet z_3$

Distributivgesetz: $z_1 \bullet (z_2 + z_3) = z_1 \bullet z_2 + z_1 \bullet z_3$

4 Das Dividieren von komplexen Zahlen

In Anlehnung an die 3. Binomische Formel wird der Bruch derart erweitert, dass der Nenner keine komplexe Zahl, sondern „nur“ noch eine reelle Zahl enthält.

17.) Gegeben sind $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = 2 + 2i$. Berechnen Sie $\mathbf{z = \frac{z_1}{z_2}}$!

18.) Gegeben sind $z_1 = 2 - 3i$ und $z_2 = 4 + 3i$. Berechnen Sie $\mathbf{z = \frac{z_1}{z_2}}$!

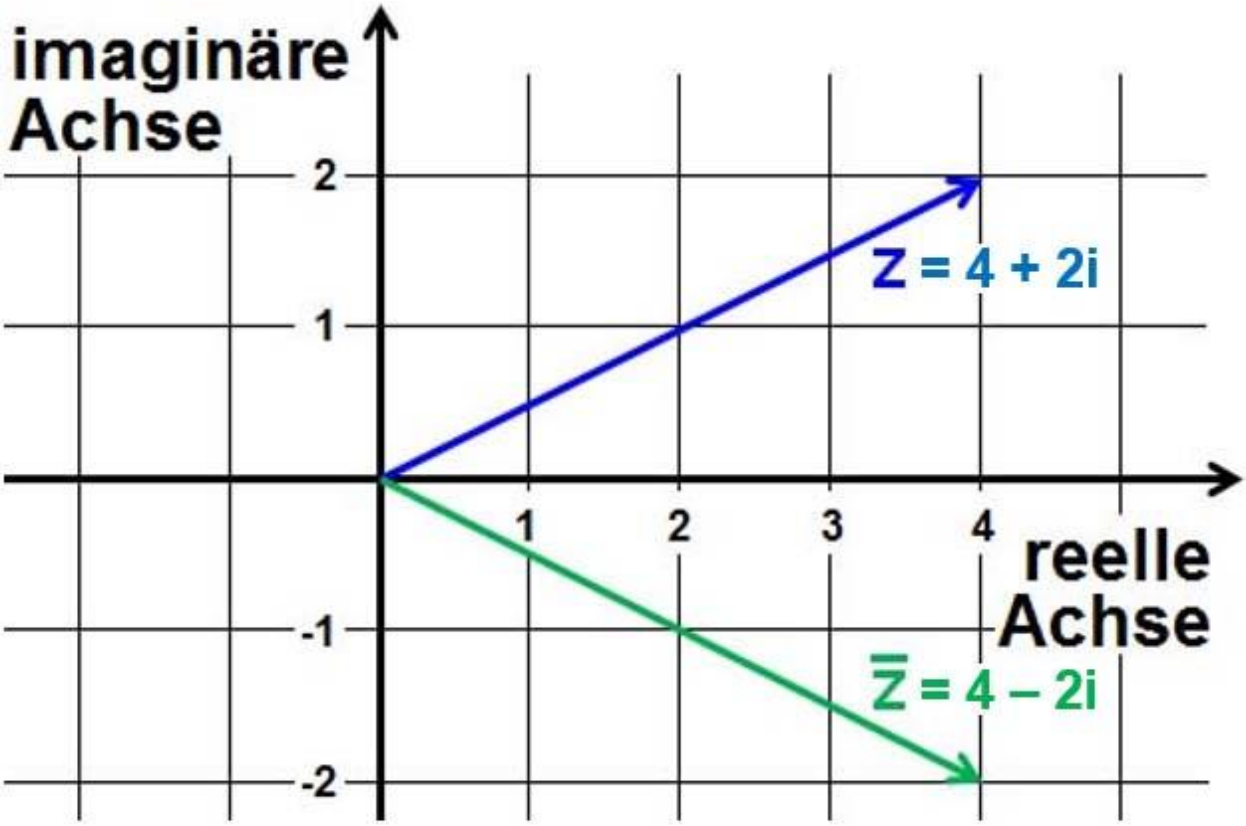
19.) Gegeben sind $z_1 = 2 - 2i$ und $z_2 = 1 - 3i$. Berechnen Sie $\mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}}$!

20.) Gegeben sind $z_1 = -2 - i$ und $z_2 = 3 - 2i$. Berechnen Sie $\mathbf{z} = \dfrac{\mathbf{z_1}}{\mathbf{z_2}}$!

21.) Gegeben sind $z_1 = -4 + i$ und $z_2 = -3 - i$. Berechnen Sie $\mathbf{z = \frac{z_1}{z_2}}$!

22.) Gegeben sind $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = 3 - 4i$. Berechnen Sie $\mathbf{z = \frac{z_1}{z_2}}$!

5 Die konjugiert komplexen Zahlen (auch: die komplex Konjugierten)



Durch Vertauschen des Vorzeichens für den imaginären Teil erhält man aus einer komplexen Zahl $z = x + y \cdot i$ die konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = x - y \cdot i$

Mithilfe der konjugiert komplexen Zahl kann der **reziproke Wert** $\frac{1}{z}$ einer komplexen Zahl z berechnet werden:

$$\frac{1}{z} = \frac{1 \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

$$= \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

$$= \frac{x - y \cdot i}{(x + y \cdot i) \cdot (x - y \cdot i)}$$

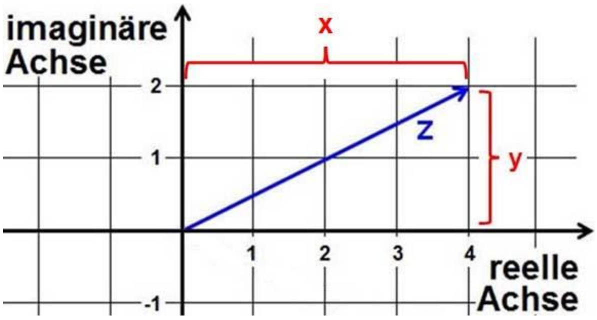
$$= \frac{x - y \cdot i}{x^2 - (y \cdot i)^2}$$

$$= \frac{x - y \cdot i}{x^2 + y^2}$$

6 Der Betrag von komplexen Zahlen

Der **Betrag einer komplexen Zahl z**
(= die Länge des Vektors) ergibt sich aus:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$z = x + y \cdot i$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

23.) Berechnen Sie für folgende komplexe Zahlen jeweils den Betrag!

z = 2 – 4i	
z = –3 – 5i	
z = –3 – 4i	
z = 4 – 5i	