Im Zeitalter der Taschenrechner scheinen die Fähigkeiten und Fertigkeiten im Kopfrechnen nicht mehr gefragt zu sein und verkümmern. Engagierte Mathematik-Lehrer kommen regelmäßig ins Kopfschütteln, wenn sie ihre Schüler dabei beobachten, wie diese reflexartig zum Rechenknecht greifen, um selbst simpelste Aufgaben wie 13 + 17 oder 4 • 19 auszurechnen.

In einem offenen Brandbrief vom 17. März 2017 an die Kultusministerkonferenz sowie die Bundesministerin für Bildung und Forschung beklagten Dutzende Hochschullehrer von verschiedenen deutschen Universitäten

> „Den Studienanfängern fehlen Mathematikkenntnisse aus dem Mittelstufenstoff, sogar schon Bruchrechnung (!), Potenz- und Wurzelrechnung, binomische Formeln, … Termumformungen … Diese Defizite sind schon längst kaum noch aufholbar … In der Studieneingangsphase finden inzwischen fast überall mathematische Analphabetisierungsprogramme statt …“ Als Konsequenz aus diesem Befund fordern sie, „Sorge zu tragen, dass
>
> 1.) Deutschlands Schulen wieder zu einer an fachlichen Inhalten orientierten Mathematikausbildung zurückkehren können,
> 2.) die Verantwortung für die gründliche Übung und Wiederholung des genannten Mittelstufenstoffes wieder uneingeschränkt von den Schulen übernommen wird,
> 3.) wichtige Grundlageninhalte wie Bruch- und Wurzelgleichungen, Potenzen mit rationalen Exponenten … wieder in die Lehrpläne aufgenommen werden,
> 4.) der Einsatz von Taschenrechnern und Computeralgebra-Systemen (CAS) die wichtige Phase des Einübens der elementaren und symbolischen Rechentechniken nicht beeinträchtigt (in Hessen ist z. B. ab Klasse 7 der Taschenrechner Pflicht, was die Routinegewinnung, etwa in der Bruchrechnung, empfindlich stört), …“

Dies soll kein Plädoyer gegen das Nutzen eines Taschenrechners sein. Jedoch soll die Unterweisung in den Umgang mit Taschenrechnern nicht das ausführliche Üben und das ständige Wiederholen einfacher Aufgaben der Algebra verdrängen. Dazu zählt auch das Kopfrechnen.

Wer die Aufgaben

a) Wie viel ist 97 • 98?

b) Wie viel ist 103 • 198?

c) Wie lautet die Quadratwurzel aus 4.489?

d) Wie viel ist $^{1}/_{18}$ von 498?

e) Um wie viel ist $^{1}/_{7}$ von 252 größer als $^{1}/_{6}$ von 330?

f) Wie viel ist 122,5 **:** 2,5?

problemlos und in angemessener Zeit im Kopf – also ohne die Hilfe eines Taschenrechners – zu lösen vermag, kann sich das Studieren dieses Buches sparen.

Wer nicht auf die Ergebnisse

a) **9.506**

b) **20.394**

c) **67**

d) **27 $^{2}/_{3}$**

e) **3**

f) **49**

kommt, aber dies auch schaffen möchte, sollte dieses Buch gewissenhaft durchlesen. Dann gelingt ihm auch, was bereits vor 140 Jahren den Volksschülern, also Schülern bis zur 10. Klasse, abverlangt wurde. Als Orientierung für dieses Heft wurde u. a. Johann Friedrich Heuners´ „Lehrgang des Rechenunterrichts mit gleichmäßiger Berücksichtigung des Kopf- und Zifferrechnens“ (16. Auflage, Ansbach, 1882) genutzt, in der Hoffnung und Erwartung, dass auch die Schüler des 21. Jahrhunderts die gleichen Fähig- und Fertigkeiten im Kopfrechnen erlangen mögen wie ihre Ur-Ur-Ur-Großeltern Ende des 19. Jahrhunderts.

<u>Das Indische Multiplizieren</u>

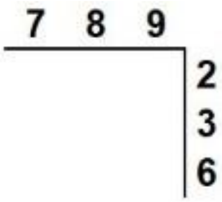
Die Aufgabe **789 • 236**

```
1578
 2367
  4734
186204
```

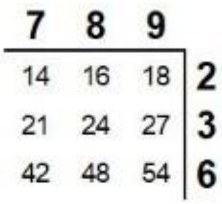
wird in deutschen Schulen zeilenweise gerechnet.
Im ersten Schritt ist 2 (die erste Ziffer von 236) mal 789 zu multiplizieren und das Ergebnis (1578) dimensionsgerecht unter den ersten Faktor zu schreiben.
Im zweiten Schritt wird 3 (die zweite Ziffer von 236) mal 789 gerechnet. Das Ergebnis (2367) wird um eine Stelle nach rechts versetzt unter das Ergebnis des ersten Schrittes geschrieben.
Im dritten Schritt wird die 6 (die dritte Ziffer von 236) mal 789 gerechnet. Das Ergebnis (4734) wird um eine Stelle nach rechts versetzt unter das Ergebnis des zweiten Schrittes geschrieben.
Schließlich werden im vierten Schritt die drei versetzt geschriebenen Ergebnisse addiert; das ergibt **186.204**.

In analoger Weise könnte man die Aufgabe in der Reihenfolge Schritt 3 (es ist 6 mal 789 zu rechnen), dann Schritt 2 (es ist 3 mal 789 zu rechnen) und schließlich Schritt 1 (es ist 2 mal 789 zu rechnen) lösen, müsste dann aber die zweite und dritte Zeile um jeweils eine Stelle nach *links* versetzen:

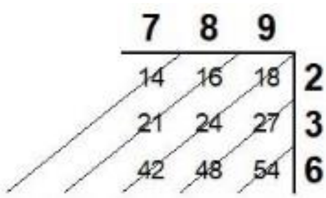
```
    789 • 236
    4734
   2367
  1578
  186204
```



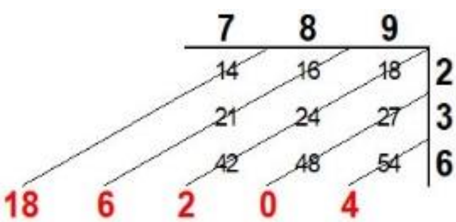
Einen anderen Lösungsweg bietet das sog. **Indische Multiplizieren**. Dabei werden die beiden Faktoren (789 und 236) an die obere bzw. an die rechte Seite eines gedachten Vierecks geschrieben.



Als nächstes werden die Produkte aus den einzelnen Ziffern der beiden Faktoren gebildet, so in der ersten Zeile 2 • 7 (14), 2 • 8 (16), 2 • 9 (18). Es folgen 3 • 7 (21), 3 • 8 (24), 3 • 9 (27) und 6 • 7 (42), 6 • 8 (48), 6 • 9 (54).



Entlang der gedanklich gezogenen Diagonalen werden diese Produkte addiert, wobei je Diagonale nur die Einerstelle aufgeschrieben wird, die Zehnerstelle wird als Einer an die nächste Diagonale nach links weitergereicht.



Die Summe der ersten Diagonalen von rechts lautet 54, die 4 wird aufgeschrieben und die 5 wird nach links als Übertrag weitergereicht.

Die Summe der zweiten Diagonalen lautet 80 (= 48 + 27 + Übertrag 5), geschrieben wird 0, weitergereicht wird 8.

Die Summe der dritten Diagonalen lautet 92 (= 42 + 24 + 18 + Übertrag 8), geschrieben wird 2, weitergereicht wird 9.

Die Summe der vierten Diagonalen lautet 46 (= 21 + 16 + Übertrag 9), geschrieben wird 6, weitergereicht wird 4.

Die Summe der letzten Diagonalen lautet 18 (= 14 + Übertrag 4).

Da es keine weiteren Diagonalen gibt, kann die 18 eingetragen werden.

1.) Lösen Sie die Aufgabe 688 • 325 mithilfe des Indischen Multiplizierens!

2.) Lösen Sie die Aufgabe 962 • 478 mithilfe des Indischen Multiplizierens!

Die Binomischen Formeln

Es gibt drei Binomische Formeln:

①	$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
②	$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
③	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Mit der **1. Binomischen Formel** kann man wunderbar folgende Aufgaben lösen:

3.) Lösen Sie die Aufgabe 61 • 61 mithilfe der 1. Binomischen Formel!

4.) Lösen Sie die Aufgabe 71 • 71 mithilfe der 1. Binomischen Formel!

5.) Lösen Sie die Aufgabe 81 • 81 mithilfe der 1. Binomischen Formel!

6.) Lösen Sie die Aufgabe 91 • 91 mithilfe der 1. Binomischen Formel!

Im Kopf lassen sich die Quadrate von Zahlen relativ leicht ermitteln, die knapp über einem vollen Zehner (hier: 61 / 71 / 81 / 91 jeweils knapp über den Zehnern 60, 70, 80 bzw. 90) liegen.

Aber auch, wenn der Abstand zum vollen Zehner etwas größer wird (hier: 82 knapp über dem Zehner 80, 93 knapp über dem Zehner 90 und 74 knapp über dem Zehner 70), ist die Aufgabe noch leicht bewältigbar.

7.) Lösen Sie die Aufgabe 82 • 82 mithilfe der 1. Binomischen Formel!

8.) Lösen Sie die Aufgabe 93 • 93 mithilfe der 1. Binomischen Formel!

9.) Lösen Sie die Aufgabe 74 • 74 mithilfe der 1. Binomischen Formel!

Mit der **2. Binomischen Formel** kann man relativ leicht das Quadrat von Zahlen ermitteln, die knapp unter einem vollen Zehner (hier: 59 / 69 / 79 / 89 jeweils knapp unter den Zehnern 60, 70, 80 bzw. 90) liegen:

10.) Lösen Sie die Aufgabe 59 • 59 mithilfe der 2. Binomischen Formel!

11.) Lösen Sie die Aufgabe 69 • 69 mithilfe der 2. Binomischen Formel!

12.) Lösen Sie die Aufgabe 79 • 79 mithilfe der 2. Binomischen Formel!

13.) Lösen Sie die Aufgabe 89 • 89 mithilfe der 2. Binomischen Formel!

Aber auch, wenn der Abstand zum vollen Zehner etwas größer wird (hier: 78 / 88 / 87 / 66 jeweils knapp unter den Zehnern 80, 90 bzw. 70), ist die Aufgabe noch im Kopf bewältigbar.

14.) Lösen Sie die Aufgabe 78 • 78 mithilfe der 2. Binomischen Formel!

15.) Lösen Sie die Aufgabe 88 • 88 mithilfe der 2. Binomischen Formel!

16.) Lösen Sie die Aufgabe 87 • 87 mithilfe der 2. Binomischen Formel!

17.) Lösen Sie die Aufgabe 66 • 66 mithilfe der 2. Binomischen Formel!

Die **3. Binomische Formel** ist die schönste der drei Formeln und am leichtesten anzuwenden, da sich ihr Ergebnis aus nur zwei Werten speist. Bedingung für die Anwendung der 3. Binomischen Formel ist allerdings der gleiche wertmäßige Abstand (Aber aus verschiedenen Richtungen!) der beiden Größen a und b von einer günstigen Quadratzahl:

18.) Lösen Sie die Aufgabe 61 • 59 mithilfe der 3. Binomischen Formel!

19.) Lösen Sie die Aufgabe 71 • 69 mithilfe der 3. Binomischen Formel!

20.) Lösen Sie die Aufgabe 81 • 79 mithilfe der 3. Binomischen Formel!

21.) Lösen Sie die Aufgabe 91 • 89 mithilfe der 3. Binomischen Formel!

22.) Lösen Sie die Aufgabe 82 • 78 mithilfe der 3. Binomischen Formel!

23.) Lösen Sie die Aufgabe 93 • 87 mithilfe der 3. Binomischen Formel!

24.) Lösen Sie die Aufgabe 74 • 66 mithilfe der 3. Binomischen Formel!

Möchte ein Lehrer seine Schüler, die noch keine Kenntnisse über die Binomischen Formeln haben, mit seinen (angeblichen?) Kopfrechenkünsten verblüffen, so lässt er sich von den Schülern eine möglichst hohe zweistellige Zahl nennen und ergänzt „zufällig“ den zweiten Faktor derart passend, dass sich das Produkt leicht mit der 3. Binomischen Formel errechnen lässt. Parallel setzt er einen Schüler als Kontrolleur ein, der das Ganze mit dem Taschenrechner nachvollziehen soll. Werden also beispielsweise 79 oder 67 oder 62 als erste Faktoren vorgeschlagen, so muss der Lehrer 81, 73 bzw. 58 als zweite Faktoren ergänzen und blitzschnell 6.399 (= $80^2 - 1^2$), 4.891 (= $70^2 - 3^2$) bzw. 3.596 (= $60^2 - 2^2$) errechnen.
Bevor der kontrollierende Schüler die Zahlen in seinen Rechenknecht eingetippt hat, bietet der Lehrer zum großen Erstaunen der Schüler bereits das Ergebnis.

Das Zerlegen eines Faktors

Beim Multiplizieren mit einem Faktor, der knapp größer (z. B. 21, 31, 41 usw.) oder kleiner (z. B. 19, 29, 39 usw.)als ein voller Zehner ist, bietet sich das Zerlegen dieses Faktors an.

25.) Berechnen Sie 74 • 21!

26.) Berechnen Sie 82 • 31!

27.) Berechnen Sie 222 • 41!

28.) Berechnen Sie 114 • 51!

29.) Berechnen Sie 123 • 61!

30.) Berechnen Sie 74 • 19!

31.) Berechnen Sie 82 • 29!

32.) Berechnen Sie 222 • 39!

33.) Berechnen Sie 114 • 49!

34.) Berechnen Sie $123 \cdot 59$!

35.) Berechnen Sie $74 \cdot 15$!

36.) Berechnen Sie $82 \cdot 16$!

37.) Berechnen Sie $222 \cdot 26$!

Das Zerlegen beider Faktoren in Zehner und Einer

In Anlehnung an die Rechnungen mithilfe der drei Binomischen Formeln lassen sich zahlreiche Aufgaben vereinfachen, indem man die Faktoren in Zehner und Einer teilt:

38.) Berechnen Sie 103 • 198!

39.) Berechnen Sie 97 • 98!

40.) Berechnen Sie 102 • 105!

41.) Berechnen Sie 98 • 103!

42.) Berechnen Sie 202 • 195!

43.) Berechnen Sie 403 • 298!

Das Ziehen der Quadratwurzel

Bei der Multiplikation zweier mehrziffriger Faktoren ergibt sich die Einerstelle des Produktes aus den Einerstellen der beiden Faktoren:

z. B.: 127 • 352 = 44.704

Das Produkt der beiden Einerstellen der Faktoren 127 und 352 lautet 7 • 2 = 14. Die Einerstelle von 14 ist 4 – so wie die Einerstelle im Ergebnis 44.704.

Die 0 als Einerstelle im Faktor liefert die 0 als Einerstelle im Produkt.
Die 1 als Einerstelle im Faktor liefert die 1 als Einerstelle im Produkt.
Die 2 als Einerstelle im Faktor liefert die 4 als Einerstelle im Produkt.
Die 3 als Einerstelle im Faktor liefert die 9 als Einerstelle im Produkt.
Die 4 als Einerstelle im Faktor liefert die 6 als Einerstelle im Produkt.
Die 5 als Einerstelle im Faktor liefert die 5 als Einerstelle im Produkt.
Die 6 als Einerstelle im Faktor liefert die 6 als Einerstelle im Produkt.
Die 7 als Einerstelle im Faktor liefert die 9 als Einerstelle im Produkt.
Die 8 als Einerstelle im Faktor liefert die 4 als Einerstelle im Produkt.
Die 9 als Einerstelle im Faktor liefert die 1 als Einerstelle im Produkt.

Bei der Multiplikation zweier mehrziffriger Faktoren ergeben sich die Einer- und die Zehnerstelle des Produktes aus den Einer- und Zehnerstellen der beiden Faktoren:

z. B.: 712 • 403 = 286.936

Das Produkt der beiden Einer- und Zehnerstellen der Faktoren 712 und 403 lautet 12 • 03 = 36. Die Einer- und Zehnerstelle ist 36 – so wie die Einer- und Zehnerstelle im Ergebnis 286.936.

Diese Erkenntnis der Ermittlung der Einer- und Zehnerstelle im Ergebnis einer Multiplikation kann man beim Ziehen von Quadratwurzeln nutzen.

44.) Wie lautet die Quadratwurzel aus 4.489?

45.) Wie lautet die Quadratwurzel aus 8.464?

46.) Wie lautet die Quadratwurzel aus 65.536?

47.) Wie lautet die Quadratwurzel aus 285.156?

Das Dividieren mit zerlegtem Dividenden

Der Schüler muß unter allen Umständen dahin gebracht werden, jede Zahl bis tausend durch jede Grundzahl auch frei im Kopfe sicher und fertig zu dividieren. Die Sicherheit beruht auf der klaren Einsicht, wie eine Zahl in jedem gegebenen Falle zu zerlegen sei, damit der zu suchende Teil ohne Schwierigkeit gefunden werden könne; die Fertigkeit ist die Frucht der Übung und wird um so leichter erzielt, je mehr man sich der Kürze befleißigt. Da die Zerlegung einer Zahl in ihre teilbaren Bestandteile nach dem Divisor sich richtet, so muß dieselbe für jeden Divisor, hier also für jede Grundzahl, besonders eingeübt werden.

aus: „Lehrgang des Rechenunterrichts …“, Seite 91

Die Ansage lautet: „Der Schüler muss unter allen Umständen dahin gebracht werden, jede Zahl bis tausend durch jede Grundzahl auch frei im Kopfe sicher und fertig zu dividieren.“
Um diese Forderung zu erreichen muss geübt, geübt und geübt werden, denn

„Die Fertigkeit ist die Frucht der Übung!“

48.) Wie lautet der 4. Teil (= ein Viertel) von 597?

49.) Wie lautet der 5. Teil (= ein Fünftel) von 597?

50.) Wie lautet der 6. Teil (= ein Sechstel) von 597?

51.) Wie lautet $^{1}/_{15}$ von 498?

52.) Wie lautet $^{1}/_{16}$ von 498?

53.) Wie lautet $^{1}/_{18}$ von 498?

54.) Um wie viel ist $^{1}/_{7}$ von 252 größer als $^{1}/_{6}$ von 330?

55.) Wie viel ist ein Fünftel von 498?

56.) Wie viel ist ein Fünftel von 244?

57.) Wie viel ist $^{1}/_{25}$ von 214,5?

58.) Wie viel ist 122,5 **:** 2,5?

59.) Wie viel ist $^{1}/_{75}$ von 214,5?

60.) Wie viel ist $^{1}/_{40}$ von 214,5?

Das Dividieren mit zerlegtem Divisor

61.) Wie viel ist ein Achtel von 214,5?

62.) Wie viel ist ein $^{1}/_{80}$ von 2.212?

Das Umrechnen von Zeiteinheiten

Das Besondere bei Umrechnungen von Zeiteiheiten ist, dass diese Einheiten nicht in Zehner-, Hunderter- oder Tausenderschritten erfolgen, wie beispielsweise

die Längeneinheiten
1 Meter = 10 Dezimeter = 100 Zentimeter = 1.000 Millimeter

die Gewichtseinheiten
1 Kilogramm = 1.000 Gramm

die Flächeneinheiten
1 Hektar = 100 Ar = 10.000 Quadratmeter

Die Umrechnungen der Zeiteiheiten erfolgen in 24er- oder 60er-Schritten:

ein Tag = 24 Stunden
eine Stunde = 60 Minuten
eine Minute = 60 Sekunden

63.) Wie viele Stunden und Minuten sind 2,15 Stunden?

64.) Wie viele Minuten sind 3,4 Stunden?

65.) Wie viele Stunden sind 2:54 Stunden (2 Stunden und 54 Minuten)?

66.) Wie viele Stunden sind 495 Minuten?

67.) Wie viele Minuten sind 192 Sekunden?

68.) Wie viele Stunden sind 126 Minuten?

69.) Wie viele Stunden sind 2¾ Arbeitstage á 9 Stunden?

70.) Wie viele Tage á 24 Stunden sind 1.728 Minuten?

71.) Wie viele Stunden sind 2½ Arbeitstage á 8½ Stunden?

72.) Wie viele Stunden sind 6.480 Sekunden?

73.) Wie viele Stunden sind 3¼ Arbeitstage á 9 Stunden?

74.) Wie viele Tage á 24 Stunden sind 51 Stunden?

75.) Wie viele Minuten sind 3,2 Tage á 24 Stunden?

76.) Wie viele Stunden sind 7:24 Stunden (7 Stunden und 24 Minuten)?

77.) Wie viele Stunden sind 3**:**09**:**36 Stunden (3 Stunden und 9 Minuten und 36 Sekunden)?

78.) Wie viele Minuten sind 4,55 Stunden?

79.) Wie viele Stunden sind 4½ Arbeitstage á 6½ Stunden?

80.) Wie viele Tage á 24 Stunden sind 2.664 Minuten?

81.) Wie viele Stunden sind 4**:**15**:**18 Stunden (4 Stunden und 15 Minuten und 18 Sekunden)?