Lineare Optimierung

1 Gleichungen und Ungleichungen

In der Wirtschaft sind häufig Entscheidungen unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen zu treffen: Aufteilung der vorhandenen Mittel auf konkurrierende Verwendungszwecke, Erzielenwollen eines Nutzenmaximums, Erreichen eines vorgegebenen Ziels mit minimalem Mitteleinsatz.
Gesucht werden dabei ein Maximum (z. B. an Gewinn) oder ein Minimum (an Verlust).

Bei Problemen der linearen Optimierung (auch: lineare Programmierung, lineare Planungsrechnung) sind sowohl die so genannte Zielfunktion als auch alle ihre Nebenbedingungen linear; d. h., lineare (Un-)Gleichungen.

1.) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge für folgende Ungleichungen!

a)	$5 \cdot x + 7$	$\leq$	$8 \cdot x - 2$	L =	
b)	$\frac{3}{4} \cdot x - \frac{2}{3}$	$\geq$	$1\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{12}$	L =	
c)	$\frac{3}{4} \cdot x - 1\frac{1}{2}$	$\leq$	$1\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4}$	L =	
d)	$1 - 2 \cdot x$	$\leq$	$x - 5$	L =	
e)	$\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$	$\geq$	$1\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{4}$	L =	

a) $5x + 7 \leq 8x - 2$

b) $\frac{3}{4} x - \frac{2}{3} \geq 1\frac{1}{2} x + \frac{1}{12}$

c) $\frac{3}{4} x - 1\frac{1}{2} \leq 1\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}$

d) $1 - 2x \leq x - 5$

e) $\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \geq 1\frac{1}{2} x - \frac{1}{4}$

2.) Welche ***natürlichen*** Zahlen x_i erfüllen jeweils die folgenden Ungleichungen?

a)	$\frac{1}{4} \cdot x + 2\frac{3}{4}$	$\leq$	$12\frac{1}{2} \cdot x - 2\frac{1}{2}$	L =
b)	$3 \cdot (\frac{1}{2} \cdot x - \frac{3}{4})$	$\leq$	$-2 \cdot (1\frac{1}{2} \cdot x - 3\frac{3}{4})$	L =
c)	$\frac{3}{4} \cdot (2 \cdot x - \frac{1}{2})$	$\geq$	$-\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2} \cdot x + 4\frac{1}{2})$	L =
d)	$4 \cdot (2\frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{2})$	$\geq$	$-6 \cdot (-2\frac{1}{2} \cdot x + 2\frac{3}{4})$	L =
e)	$\frac{3}{4} \cdot (2 \cdot x - \frac{1}{2})$	$\leq$	$-\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2} \cdot x + 4\frac{1}{2})$	L =

a) $\frac{1}{4} x + 2\frac{3}{4} \leq 12\frac{1}{2} x - 2\frac{1}{2}$

b) $3 \cdot (\frac{1}{2} x - \frac{3}{4}) \leq -2 \cdot (1\frac{1}{2} x - 3\frac{3}{4})$

c) $\frac{3}{4} \cdot (2x - \frac{1}{2}) \geq -\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2} x + 4\frac{1}{2})$

d) $4 \cdot (2\frac{3}{4} x + \frac{1}{2}) \geq -6 \cdot (-2\frac{1}{2} x + 2\frac{3}{4})$

e) $\frac{3}{4} \cdot (2x - \frac{1}{2}) \leq -\frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2})$

3.) Bestimmen Sie jeweils die gemeinsame Lösungsmenge!

a)	$1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$	$\leq$	$3\frac{1}{4}x + 4\frac{3}{4}$	und	$5x + 3\frac{3}{4}$	$\geq$	$\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{4}$	L =
b)	$2\cdot(3x - 5\frac{1}{2})$	$\leq$	$4 \cdot (2x + 6)$	und	$2\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$	$\geq$	$5\frac{1}{2}x - 3\frac{3}{4}$	L =
c)	$-8\cdot(2x-6\frac{1}{4})$	$\geq$	$3\cdot (7x - 8)$	und	$2x + 2\frac{1}{2}$	$\leq$	$6x - 5\frac{1}{2}$	L =
d)	$-\frac{3}{4}x - 4\frac{1}{2}$	$\geq$	$\frac{1}{2}x - 2$	und	$2\frac{3}{4}x - 1$	$\geq$	$1\frac{1}{4}x - 10$	L =
e)	$-1\frac{1}{2}x + 2$	$\geq$	$x - 8$	und	$x - 1$	$\geq$	$\frac{1}{4}x - 2\frac{1}{2}$	L =

a) $1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2} \leq 3\frac{1}{4}x + 4\frac{3}{4}$ und $5x + 3\frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{4}$

b) $2\cdot(3x-5\frac{1}{2}) \leq 4 \cdot(2x + 6)$ und $2\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \geq 5\frac{1}{2}x - 3\frac{3}{4}$

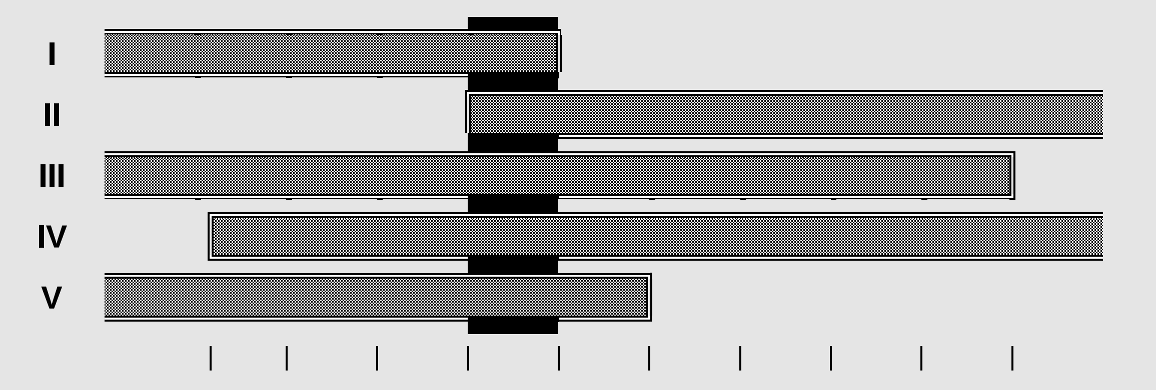
c) $-8(2x-6\frac{1}{4}) \geq 3 \cdot (7x - 8)$ und $2x + 2\frac{1}{2} \leq 6x - 5\frac{1}{2}$

d) $-\frac{3}{4}x - 4\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}x - 2$ und $2\frac{3}{4}x - 1 \geq 1\frac{1}{4}x - 10$

e) $-1\frac{1}{2}x + 2 \geq x - 8$ und $x - 1 \geq \frac{1}{4}x - 2\frac{1}{2}$

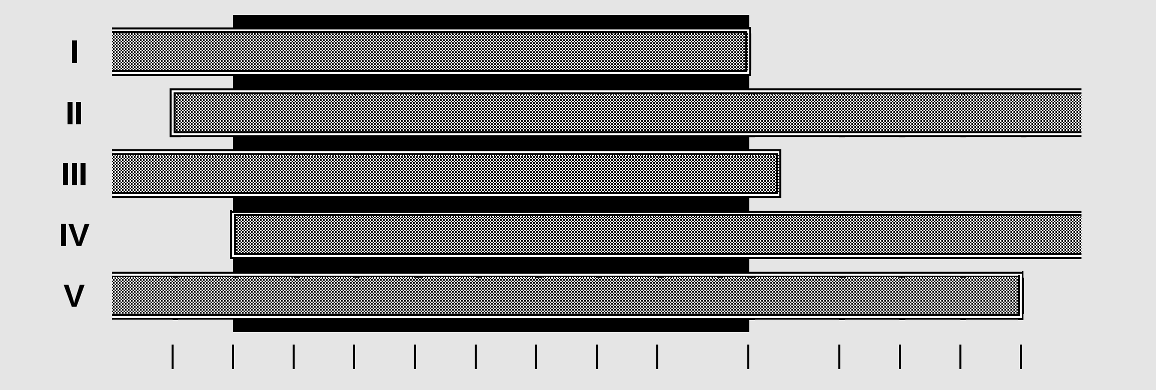
4.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für folgende Ungleichungen!

I	x	$\leq$	$1\frac{1}{2}$
II	x	$\geq$	1
III	x	$\leq$	4
IV	x	$\geq$	$-\,{}^{1}/_{3}$
V	x	$\leq$	2



5.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für folgende Ungleichungen!

I	x	$\leq$	${}^{5}/_{2}$
II	x	$\geq$	$-\,7$
III	x	$\leq$	$3^2 - 6$
IV	x	$\geq$	$-\,{}^{108}/_{18}$
V	x	$\leq$	7



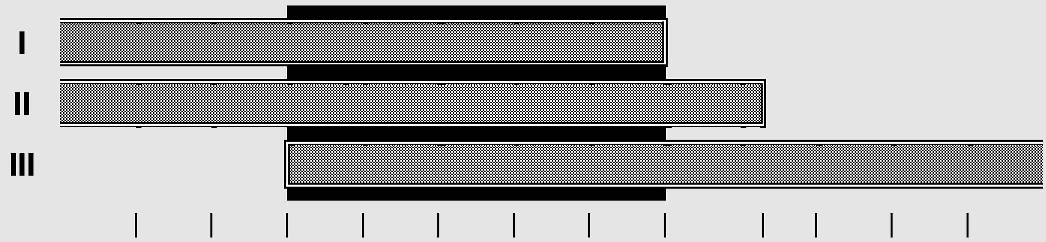
6.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für folgende Ungleichungen!

I	$3x + 2$	$\leq$	$x + 8$
II	$2x + 1$	$\geq$	$5x - 14$
III	$x - 2$	$\leq$	$6x + 8$

I $\quad 3x + 2 \leq x + 8$

II $\quad 2x + 1 \geq 5x - 14$

III $\quad x - 2 \leq 6x + 8$



7.) Bestimmen Sie die gemeinsame Lösungsmenge für folgende Ungleichungen!

I	$1\frac{1}{2}x - 5$	$\leq$	$4x - 10$
II	$-2 \cdot (-4x - 2\frac{1}{2})$	$\geq$	$4 \cdot (x + 2)$
III	$\frac{1}{2} \cdot (6x + 4)$	$\leq$	$4 \cdot (\frac{1}{4}x + 3)$
IV	$\frac{1}{4} \cdot (4x + 48)$	$\geq$	$\frac{1}{2} \cdot (8x - 30)$
V	$-2 \cdot (x + 1)$	$\leq$	$4 \cdot (-1\frac{1}{4}x + 4)$

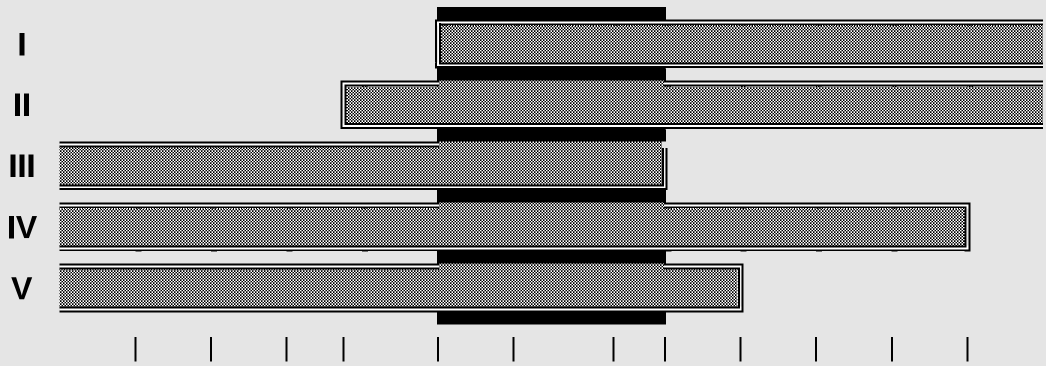
I $\quad 1\frac{1}{2}x - 5 \leq 4x - 10$

II $\quad -2 \cdot (-4x - 2\frac{1}{2}) \geq 4 \cdot (x + 2)$

III $\quad \frac{1}{2} \cdot (6x + 4) \leq 4 \cdot (\frac{1}{4}x + 3)$

IV $\quad \frac{1}{4} \cdot (4x + 48) \geq \frac{1}{2} \cdot (8x - 30)$

V $\quad -2 \cdot (x + 1) \leq 4 \cdot (-1\frac{1}{4}x + 4)$



8.) Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!

I $x_2 \leq -\frac{1}{2} x_1 + 25$

II $x_2 \leq -2\frac{1}{2} x_1 + 40$

III $x_2 \leq -\frac{1}{9} x_1 + 20$

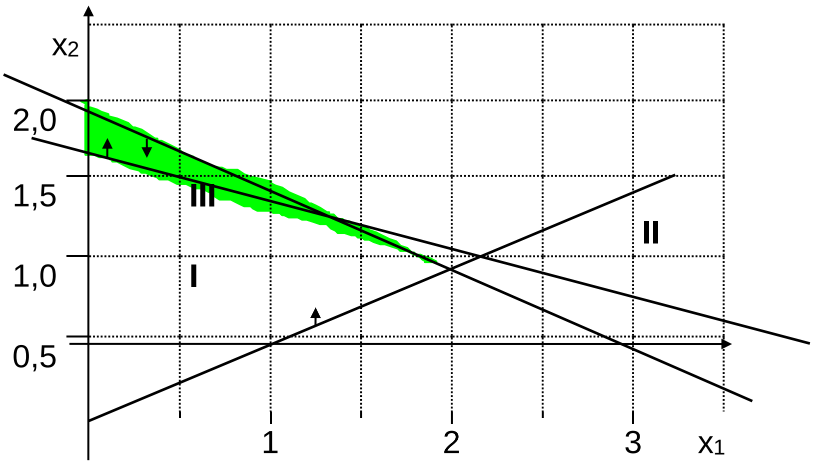
IV $x_2 \leq -2x_1 + 50$

V $x_1 \geq 0$

VI $x_2 \geq 0$

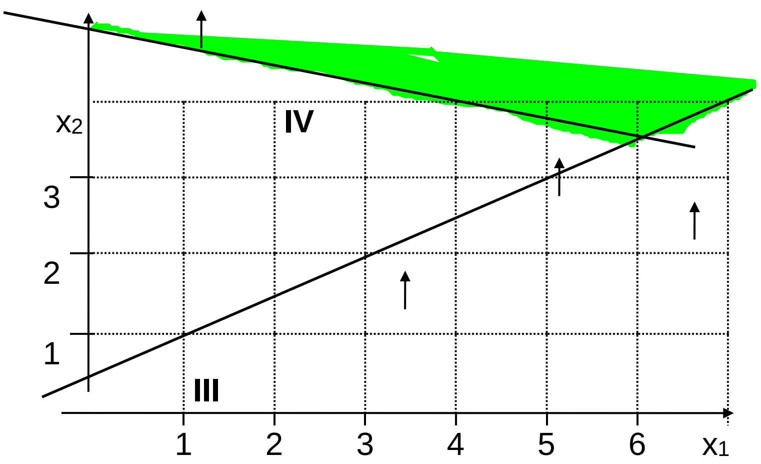
9.) Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!

I	$x_1 + 3x_2$	$\geq$	4
II	$-x_1 + 2x_2$	$\geq$	-1
III	$2x_1 + 4x_2$	$\leq$	8
IV	x_1	$\geq$	0
V	x_2	$\geq$	0



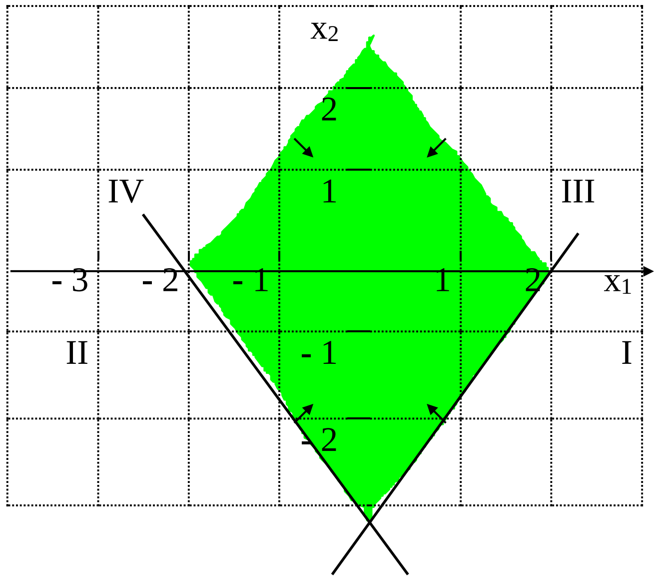
10.) Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!

I	x_1	$\geq$	0
II	x_2	$\geq$	0
III	$-x_1 + 2x_2$	$\geq$	-1
IV	$-\frac{1}{2} x_1 - 2x_2$	$\leq$	-8



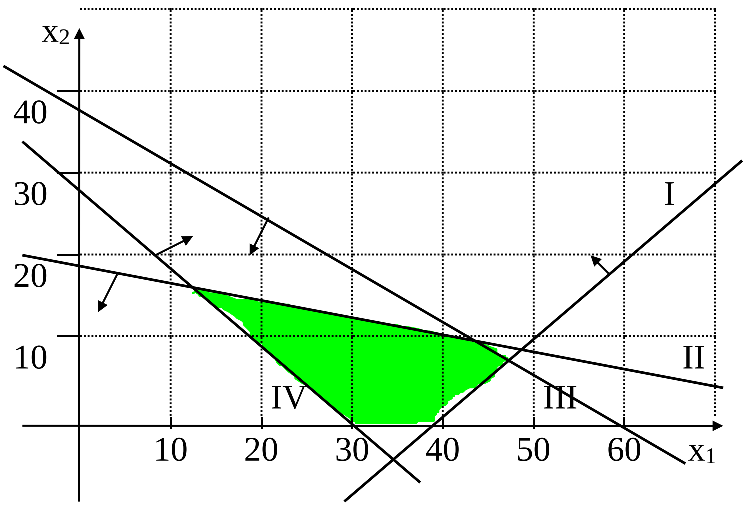
11.) Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!

I	$3x_1 + 2x_2$	$\leq$	6
II	$-3x_1 + 2x_2$	$\leq$	6
III	$3x_1 - 2x_2$	$\leq$	6
IV	$-3x_1 - 2x_2$	$\leq$	6



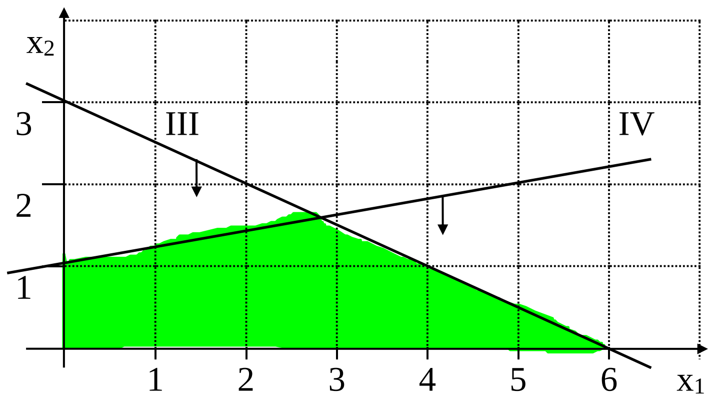
12.) Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!

I	$-x_1 + x_2$	$\geq$	-40
II	$0{,}2x_1 + x_2$	$\leq$	20
III	$^2/_3\, x_1 + x_2$	$\leq$	40
IV	$x_1 + x_2$	$\geq$	30
V	x_1	$\geq$	0
VI	x_2	$\geq$	0



13.) Stellen Sie den gemeinsamen Lösungsbereich grafisch dar!

I	x_1	$\geq$	0
II	x_2	$\geq$	0
III	$x_1 + 2x_2$	$\leq$	6
IV	$-0{,}4x_1 + 2x_2$	$\leq$	2



14.) Ein Betrieb besitzt drei Maschinen M1, M2 und M3, auf denen in einem dreistufigen Produktionsprozess die Produkte 1 und 2 in den Mengen x_1 und x_2 alternativ hergestellt werden können. Jedes Produkt muss alle drei Maschinen hintereinander in der Reihenfolge M1, M2 und M3 durchlaufen.
Der Gewinn bei Produkt 1 beträgt 50 DM/Stück, bei Produkt 2 100 DM/Stück. Die Kapazität jeder Maschine ist auf 40 Stunden pro Woche (= 2.400 Minuten/ Woche) beschränkt. Die Bearbeitungszeiten der Produkte auf den Maschinen ergeben sich aus folgender Tabelle:

Maschine	beanspruchte Kapazität in Minuten für die Produktion eines Stückes von Produkt 1	Produkt 2	max. Kapazität in Minuten/Woche
M1	15	48	2.400
M2	30	40	2.400
M3	40	20	2.400
	85	108	

Welche Stückzahlen x_1 und x_2 der Produkte 1 bzw. 2 müssen produziert werden, um einen maximalen Gewinn zu erreichen?

x_1 = 22
x_2 = 42

Das mathematische Modell umfasst immer:

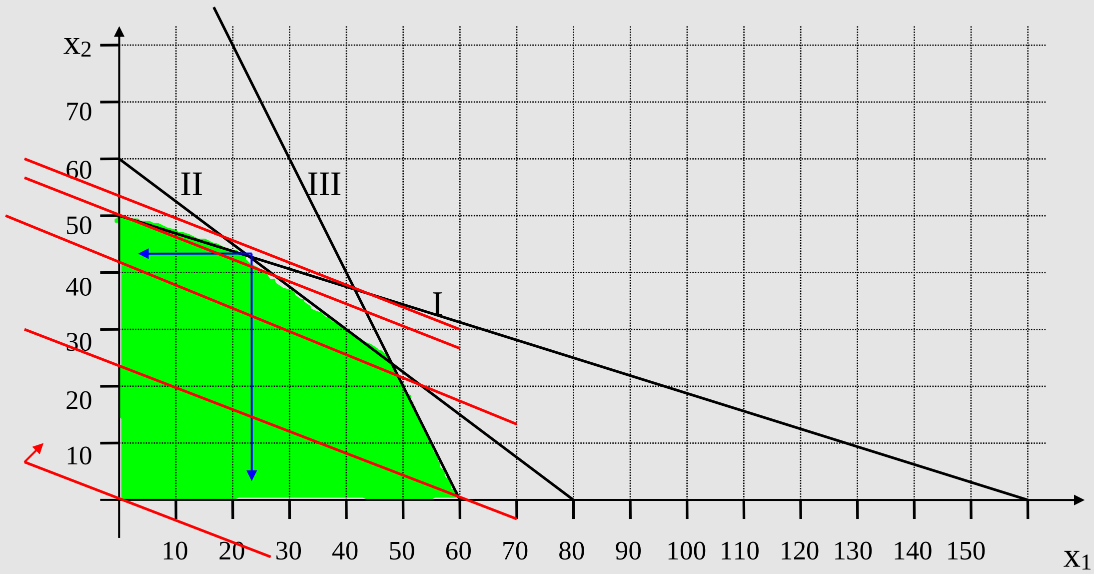
1.) **Zielfunktion**: gibt an, welche Größe maximiert/minimiert wird.
$Z(x_1,x_2) = 50\,x_1 + 100\,x_2 \rightarrow$ Max. $\rightarrow$ **$x_2 = -0{,}5\,x_1$**

2.) **Nebenbedingungen** (Restriktionen): begrenzen die Variablen auf einen bestimmten Bereich.

I	$15\,x_1 + 48\,x_2 \leq 2.400$	$\rightarrow$	$x_2 \leq -0{,}3125\,x_1 + 50$
II	$30\,x_1 + 40\,x_2 \leq 2.400$	$\rightarrow$	$x_2 \leq -0{,}75\,x_1 + 60$
III	$40\,x_1 + 20\,x_2 \leq 2.400$	$\rightarrow$	$x_2 \leq -2\,x_1 + 120$

3.) **Nichtnegativitätsbedingungen**: besagen, dass die Variablen keine negativen Werte annehmen.

IV $x1 \geq 0$
V $x2 \geq 0$



Errechnen des Gewinnmaximums: Schnittpunkt der Geraden I und II

$$\begin{aligned}
-0{,}3125\,x_1 + 50 &= -0{,}75\,x_1 + 60 && \mid +0{,}75\,x_1 - 50 \\
0{,}4375\,x_1 &= 10 && \mid :0{,}4375 \\
x_1 &= 22{,}857... \\
x_1 &= 22
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} \qquad x_2 &\leq -0{,}75\,x_1 + 60 \\
x_2 &\leq -0{,}75 \cdot 22{,}857 + 60 \\
x_2 &\leq -17{,}14 + 60 \\
x_2 &\leq 42{,}86 \\
x_2 &= 42
\end{aligned}$$

Ermitteln des Gewinns:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Z\,(x_1, x_2)} &= \mathbf{50\,x_1 + 100\,x_2} \quad \rightarrow \mathbf{Max.} \\
&= 50 \cdot 22 + 100 \cdot 42 \\
&= 1.100 + 4.200 \\
&= 5.300
\end{aligned}$$

15.) Zur Produktion von zwei Gütern A und B werden drei Stoffe in bestimmten Mengen benötigt. Die Verkaufspreise der Güter betragen 6,00 DM (für A) und 8,00 DM (für B).

Stoffe	benötigte Mengen in kg pro Stück A	B	verfügbarer Vorrat an Stoffen in kg
1	3	5	50
2	4	1	36
3	1	1	12

Gesucht ist das umsatzmaximale Produktionsprogramm! $x_1 = \boxed{5}$ $x_2 = \boxed{7}$

<u>Zielfunktion:</u> $Z = 6\,x_1 + 8\,x_2 \rightarrow$ Max.

<u>Nebenbedingungen:</u>

I $\quad 3\,x_1 + 5\,x_2 \leq 50 \quad \rightarrow \quad x_2 \leq -0{,}6\,x_1 + 10$

II $\quad 4\,x_1 + x_2 \leq 36 \quad \rightarrow \quad x_2 \leq -4\,x_1 + 36$

III $\quad x_1 + x_2 \leq 12 \quad \rightarrow \quad x_2 \leq -x_1 + 12$

<u>Nichtnegativ.-bed.:</u>

IV $\quad x_1 \geq 0$

V $\quad x_2 \geq 0$

<u>Errechnen des Gewinnmaximums:</u> Schnittpunkt der Geraden I und III

$$-0{,}6\,x_1 + 10 = -x_1 + 12 \quad | \cdot 5$$
$$-3\,x_1 + 50 = -5\,x_1 + 60 \quad | +5\,x_1 - 50$$
$$2\,x_1 = 10 \quad | :2$$
$$x_1 = 5$$

III
$$x_2 \leq -x_1 + 12$$
$$x_2 \leq -5 + 12$$
$$x_2 = 7$$

<u>Ermitteln des Gewinns:</u>

$$\mathbf{Z\,(x_1, x_2) = 6\,x_1 + 8\,x_2 \rightarrow Max.}$$
$$= 6 \cdot 5 + 8 \cdot 7$$
$$= 30 + 56$$
$$= 86$$

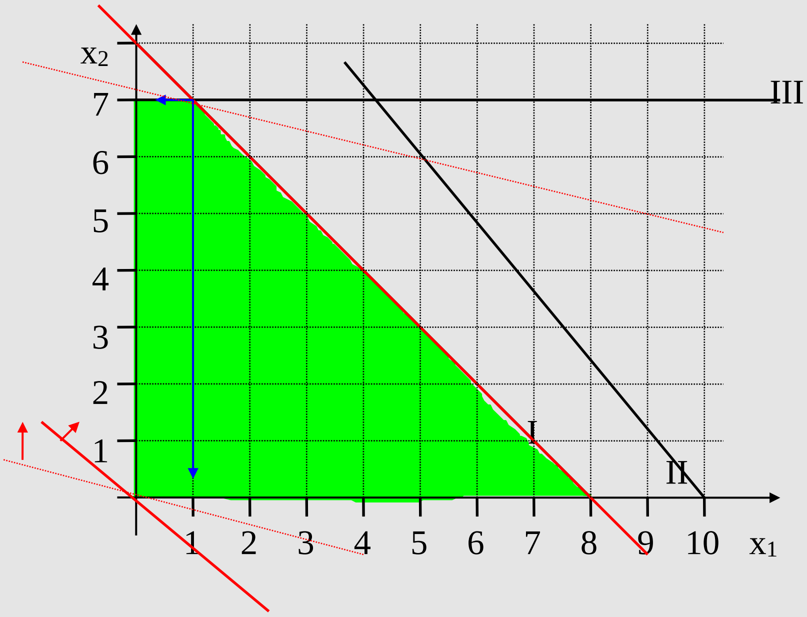
16.) Lösen Sie grafisch folgende Optimierungsaufgaben!

I	$x_1 + 2x_2$	$\leq$	16
II	$6x_1 + 5x_2$	$\leq$	60
III	x_2	$\leq$	7
IV	x_1	$\leq$	8
V	x_1	$\geq$	0
VI	x_2	$\geq$	0

a) $Z_1 = x_1 + 4x_2 \Rightarrow$ Maximum

b) $Z_2 = x_1 + x_2 \Rightarrow$ Maximum

I	x_2	$\leq$	$8 - x_1$
II	x_2	$\leq$	$12 - 1{,}2\, x_1$
III	x_2	$\leq$	7



Errechnen des Maximums: Schnittpunkt der Geraden I und III

$$8 - x_1 = 7 \qquad | + x_1 - 7$$
$$x_1 = 1$$

I
$$x_2 \leq 8 - x_1$$
$$x_2 \leq 8 - 1$$
$$x_2 = 7$$

Ermitteln des Gewinns:
$$\mathbf{Z\,(x_1, x_2) = x_1 + 4\,x_2 \rightarrow Max.}$$
$$= 1 + 4 \cdot 7$$
$$= 29$$

$$\mathbf{Z\,(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow Max.}$$
$$= 1 + 7$$
$$= 8$$

17.) Ein Stahlwerk erhielt einen Auftrag für die Herstellung von Guss-Stahl. Es benötigt bestimmte Mengen von drei Metallen, die in deutschem und schwedischem Eisenerz enthalten sind. Die Zusammensetzung von deutschem und schwedischem Erz ergibt sich aus folgender Tabelle:

Metalle	Metallgehalt je 10 Tonnen Eisenerz deutsch	Metallgehalt je 10 Tonnen Eisenerz schwedisch
Metall 1	2 t	1 t
Metall 2	6 t	5 t
Metall 3	1 t	2 t

Der jeweilige Rest zu den 10 t ist unbrauchbares Gestein.
Der Bezugspreis für deutsches Eisenerz beträgt 70 DM je Tonne, der für schwedisches Erz 100 DM je Tonne. Laut Lieferungsbedingungen der Erzgruben können immer nur 10 t bzw. ein Vielfaches davon bestellt werden.

Für den Auftrag werden mindestens benötigt:

Metall 1	70 t
Metall 2	300 t
Metall 3	80 t

Es können auch mehr Tonnen von den einzelnen Metallen für den Guss-Stahl verwendet werden, aber nicht weniger.

Wieviel Tonnen von deutschem und schwedischem Erz müssen eingekauft werden, um die Beschaffungskosten an Erzen für den erhaltenen Auftrag zu minimieren.

deutsches Erz in t | 2 | 9 | 0 |

schwedisches Erz in t | 2 | 7 | 0 |

<u>Zielfunktion:</u> $Z = 700\,D + 1.000\,S \rightarrow \text{Min.}$

10 t deutsches Erz kosten 700 DM, 10 t schwedisches Erz kosten 1.000 DM.

<u>Nebenbedingungen:</u>

I $\quad 2\,D + 1\,S \geq 70 \quad \rightarrow \quad S \geq 70 - 2\,D$

II $\quad 6\,D + 5\,S \geq 300 \quad \rightarrow \quad S \geq 60 - 1{,}2\,D$

III $\quad 1\,D + 2\,S \geq 80 \quad \rightarrow \quad S \geq 40 - 0{,}5\,D$

Selbstverständlich kann auch <u>mehr</u> als die Mindestmenge an D (deutsches Erz) oder/und S (schwedisches Erz) für die Herstellung von Guss-Stahl verwendet werden. Deshalb gilt das Relationszeichen ≥ .

<u>Nichtnegativ.-bed.:</u>

IV $\quad D \geq 0$

V $\quad S \geq 0$

Die einzukaufenden Mengen dürfen natürlich nicht negativ sein!

Errechnen des Kostenminimums: Schnittpunkt der Geraden II und III

60 - 1,2 D	=	40 - 0,5 D	| • 10
600 - 12 D	=	400 - 5 D	| + 12 D - 400
200	=	7 D	| : 7
D	=	28,571...	
II S	≥	60 - 1,2 • 28,571	
S	≥	60 - 34,285	
S	=	25,715	

Ermitteln der Kosten: **Z (D, S)** = **700 D + 1.000 S** → **Min.**

= 700 • 29 + 1.000 • 26

= 20.300 + 26.000

= 46.300

Proberechnung:

Metalle	Metallgehalt je 10 Tonnen Eisenerz deutsch schwedisch	benötigte Mindestmenge
Metall 1	2 t • 29 + 1 t • 27 = 85	70
Metall 2	6 t • 29 + 5 t • 27 = 309	300
Metall 3	1 t • 29 + 2 t • 27 = 83	80

Das Kostenminimum wird erreicht, wenn 290 t deutsches Erz und 260 t schwedisches Erz gekauft werden.
Benötigt werden zwar nur knapp 286 t deutsches Erz und knapp 258 t schwedisches Erz, aber laut Lieferungsbedingungen müssen jeweils volle 10 t Erz gekauft werden.

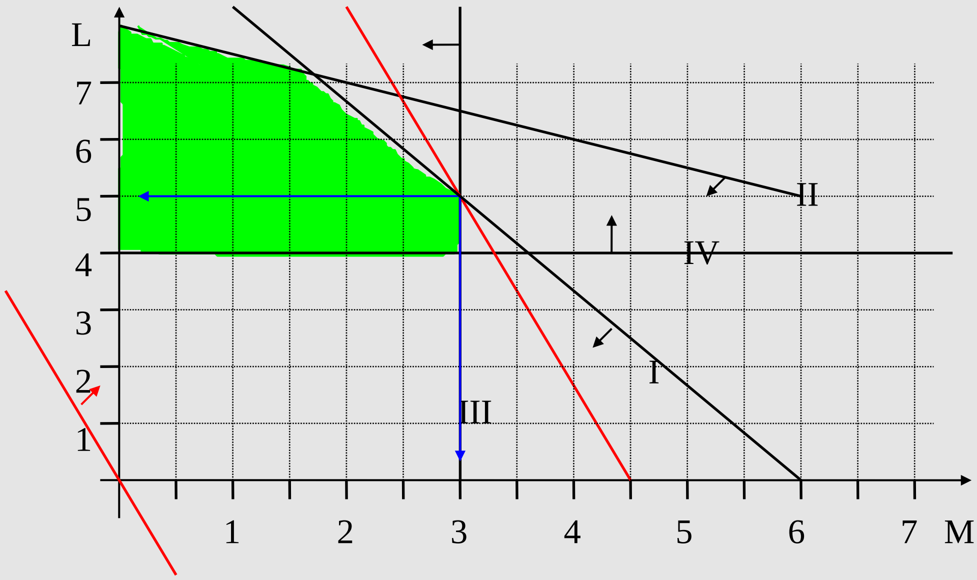
18.) Eine kleine Mopedfabrik baut und verkauft die beiden Typen Mofa und Lofa. Während die Produktionskosten für ein Mofa 5.000 DM betragen, belaufen sie sich bei der Lofa nur auf 3.000 DM pro Stück. Insgesamt können pro Tag nicht mehr als 30.000 DM für die Produktion ausgegeben werden.
Für die Fertigung der Mofa rechnet die Arbeitsvorbereitung mit einer Arbeitszeit von 30 Stunden, für die der Lofa setzt sie hingegen 60 Stunden an. Pro Tag stehen maximal 480 Arbeitsstunden zur Verfügung. Vom Mofa sollen pro Tag maximal 3 Stück gefertigt werden.
Marktanalysen zeigen, dass pro Tag mindestens 4 Lofa und unbegrenzt Mofa abgesetzt werden können. Der Verkaufspreis der Lofa liegt bei 5.000 DM, der der Mofa bei 10.000 DM pro Stück.

Wieviel Mofa und Lofa sollen täglich produziert werden,	Mofa	3
um das Umsatzmaximum zu erreichen?	Lofa	5
Wie groß ist dieser maximale Umsatz?	DM	55000

Zielfunktion: $Z = 10.000\,M + 5.000\,L \rightarrow$ Max.

Nebenbedingungen:

Produktionskosten	I	$5.000\,M + 3.000\,L \le 30.000$	$\rightarrow L \le 10 - {}^5/_3\,M$
Arbeitsstunden	II	$30\,M + 60\,L \le 480$	$\rightarrow L \le 8 - ½\,M$
max. Produktion	III	$M \le 3$	$\rightarrow M \le 3$
Mindestverkauf	IV	$L \ge 4$	$\rightarrow L \ge 4$
Nichtnegat.-bed.:	V / VI	$M, L \ge 0$	



Errechnen des Gewinnmaximums: Schnittpunkt der Geraden I und III

$M = 3$ $\qquad L = 10 - {}^5/_3\,M$

$L = 10 - 5 = 5$

Ermitteln des Gewinns: **$Z(M, L) = 10.000\,M + 5.000\,L \rightarrow$ Max.**

$= 10.000 \cdot 3 + 5.000 \cdot 5$

$= 55.000$