

Die Zahlensysteme

© Bommhardt. Das Vervielfältigen dieses Arbeitsmaterials zu nichtkommerziellen Zwecken ist gestattet. www.bommi2000.de

1	Einführung	Seite 1
2	Das Umrechnen von Zahlen aus unterschiedlichen Zahlensystemen	Seite 3
3	Das Rechnen im Dualsystem	Seite 7
3.1	Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Dualzahlen	Seite 7
3.2	Das Umrechnen von Dualzahlen in Dezimalzahlen	Seite 8
3.3	Das Grundrechnen mit Dualzahlen	Seite 9
4	Das Rechnen im Hexadezimalsystem	Seite 10
4.1	Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Hexadezimalzahlen	Seite 10
4.2	Das Umrechnen von Hexadezimalzahlen in Dezimalzahlen	Seite 12
4.3	Das Grundrechnen mit Hexadezimalzahlen	Seite 13
5	Das Rechnen im Oktalsystem	Seite 14
5.1	Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Oktalzahlen	Seite 14
5.2	Das Umrechnen von Oktalzahlen in Dezimalzahlen	Seite 16
5.3	Das Grundrechnen mit Oktalzahlen	Seite 17
6	Das Rechnen im Quartalsystem	Seite 18
6.1	Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Quartalzahlen	Seite 18
6.2	Das Umrechnen von Quartalzahlen in Dezimalzahlen	Seite 20
6.3	Das Grundrechnen mit Quartalzahlen	Seite 21
7	Das Umrechnen zwischen Hexadezimal-, Oktal-, Quartal- und Dualsystem	Seite 22

1 Einführung

Ziffer: Schriftzeichen zum Darstellen von Zahlen

Zahl: – Mengenangabe
 – Darstellung in Ziffern (4.711) oder Worten („hundert“)

Additionssystem: stellenwertloses Zahlensystem

→ Römisches Zahlensystem war bis ins 16. Jahrhundert in Europa in Gebrauch

Regeln:

- 1.) Alle Symbole stehen in der Reihenfolge ihrer Werte, erst die höherwertigen, dann die niedrigeren.
- 2.) Die Hauptsymbole I, X, C und M dürfen maximal dreimal hintereinander stehen.
- 3.) Die Nebensymbole V, L und D dürfen nur einmal verwendet werden und nicht vor einem höherwertigen Symbol stehen.
- 4.) Vor einem Symbol steht höchstens das nächstkleinere Hauptsymbol.

Beispiele:

49 = XLIX	nicht: IL
99 = XCIX	nicht: IC , LIL
495 = CDXCV	nicht: VD , XDV , CDLXLV
999 = CMXCIX	nicht: IM , XMIX , DCDLXLIX
1997 = MCMXCVII	
4 = IV	

Uhr der evangelisch-reformierten Kirche in Leipzig mit der „falschen“ Vier



Nachteile:

- lange und unübersichtliche Zahlen
- keine Null
- schwierig bei Rechenoperationen
z. B.: XCIX • XLIX (statt: 99 • 49)



Eröffnet 31. Oktober 1735



Anno 1685



Casa del Cavallo in Siena (Italien)

29. Juni 1962

Positionssystem: (auch: Stellenwertsystem)

- von Bedeutung ist die jeweilige Position der Ziffern innerhalb der Zahl
- z. B.: $4711_{10} = 4 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$
 $= 4.000 + 700 + 10 + 1$
- Das Sexagesimalsystem (Basis 60) verwendeten ca. 3000 bis 1800 v. u. Z. die Babylonier, Sumerer und Mesopotamier.
 → Zeiteinteilung, Kreiseinteilung
- Das Vigesimalssystem (Basis 20) verwendeten die Kelten in England und Frankreich, die Basken in Nordspanien, die Azteken und die Mayas in Südamerika.
 → bis in die 1970er Jahre war ein engl. Pfund = 20 Schillinge
- Das Dezimalsystem (lat. „decem“ = dt. „zehn“) basiert auf der Grundzahl 10. Im Dezimalsystem gibt es die Ziffern 0, 1, 2, ... 9. Die Stellenwerte einer Dezimalzahl verlaufen von rechts nach links wie folgt: 1, 10, 100, 1.000 usw.

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \text{Exponent: 2} \\
 \boxed{10^2 = 100} \leftarrow \text{Potenzwert: 100} \\
 \uparrow \text{Basis: 10}
 \end{array}$$

2 Das Umrechnen von Zahlen aus unterschiedlichen Zahlensystemen

1.) Welchen Dezimalwerten entsprechen die Zahlen 4.711_7 / 4.711_8 / 4.711_9 ?

a) Nicht lösbar, da die Ziffer 7 im 7-er-Zahlensystem nicht existiert!

$$\begin{aligned} \text{b) } 4.711_8 &= 4 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 \\ &= 4 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 8 + 1 \\ &= 2.048 + 448 + 8 + 1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 4.711_9 &= 4 \cdot 9^3 + 7 \cdot 9^2 + 1 \cdot 9^1 + 1 \cdot 9^0 \\ &= 4 \cdot 729 + 7 \cdot 81 + 9 + 1 \\ &= 2.916 + 567 + 9 + 1 = \end{aligned}$$

2.) Welchen Dezimalwerten entsprechen die Zahlen 2.004_5 / 2.004_6 / 2.004_7 / 2.004_8 / 2.004_9 ?

$$\begin{aligned} \text{a) } 2.004_5 &= 2 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 \\ &= 2 \cdot 125 + 4 \cdot 1 \\ &= 250 + 4 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 2.004_6 &= 2 \cdot 6^3 + 0 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0 \\ &= 2 \cdot 216 + 4 \cdot 1 \\ &= 432 + 4 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 2.004_7 &= 2 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 \\ &= 2 \cdot 343 + 4 \cdot 1 \\ &= 686 + 4 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 2.004_8 &= 2 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\ &= 2 \cdot 512 + 4 \cdot 1 \\ &= 1.024 + 4 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 2.004_9 &= 2 \cdot 9^3 + 0 \cdot 9^2 + 0 \cdot 9^1 + 4 \cdot 9^0 \\ &= 2 \cdot 729 + 4 \cdot 1 \\ &= 1.458 + 4 = \end{aligned}$$

3.)

Welchen Dezimalwerten entsprechen 1.443_5 / 1.443_7 / 1.443_9 / 1.443_{11} / 1.443_{13} ?

a) $1.443_5 = 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0$
 $= 125 + 100 + 20 + 3 =$

b) $1.443_7 = 1 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0$
 $= 343 + 196 + 28 + 3 =$

c) $1.443_9 = 1 \cdot 9^3 + 4 \cdot 9^2 + 4 \cdot 9^1 + 3 \cdot 9^0$
 $= 729 + 324 + 36 + 3 =$

d) $1.443_{11} = 1 \cdot 11^3 + 4 \cdot 11^2 + 4 \cdot 11^1 + 3 \cdot 11^0$
 $= 1.331 + 484 + 44 + 3 =$

e) $1.443_{13} = 1 \cdot 13^3 + 4 \cdot 13^2 + 4 \cdot 13^1 + 3 \cdot 13^0$
 $= 2.197 + 676 + 52 + 3 =$

4.)

Stellen Sie die Dezimalzahl 4.711_{10} im 7-er-, im 8-er- und im 9-er-Zahlensystem dar!

a) $4.711 : 7 = 673$ Rest:

0

 $673 : 7 = 96$ Rest:

1

 $96 : 7 = 13$ Rest:

5

 $13 : 7 = 1$ Rest:

6

 $1 : 7 = 0$ Rest:

1

 \rightarrow

b) $4.711 : 8 = 588$ Rest:

7

 $588 : 8 = 73$ Rest:

4

 $73 : 8 = 9$ Rest:

1

 $9 : 8 = 1$ Rest:

1

 $1 : 8 = 0$ Rest:

1

 \rightarrow

c) $4.711 : 9 = 523$ Rest:

4

 $523 : 9 = 58$ Rest:

1

 $58 : 9 = 6$ Rest:

4

 $6 : 9 = 0$ Rest:

6

 \rightarrow

5.)

Stellen Sie die Dezimalzahl 2.004_{10} im 5er-, 6er-, 7er-, 8er- und 9er-Zahlensystem dar!

a) $2.004 : 5 = 400$ Rest:

4
0
0
1
3

 →

$400 : 5 = 80$ Rest:

0
0
1
3

$80 : 5 = 16$ Rest:

0
1
3

$16 : 5 = 3$ Rest:

1
3

$3 : 5 = 0$ Rest:

3

b) $2.004 : 6 = 334$ Rest:

0
4
1
3
1

 →

$334 : 6 = 55$ Rest:

4
1
3
1

$55 : 6 = 9$ Rest:

1
3
1

$9 : 6 = 1$ Rest:

3
1

$1 : 6 = 0$ Rest:

1

c) $2.004 : 7 = 286$ Rest:

2
6
5
5

 →

$286 : 7 = 40$ Rest:

6
5
5

$40 : 7 = 5$ Rest:

5
5

$5 : 7 = 0$ Rest:

5

d) $2.004 : 8 = 250$ Rest:

4
2
7
3

 →

$250 : 8 = 31$ Rest:

2
7
3

$31 : 8 = 3$ Rest:

7
3

$3 : 8 = 0$ Rest:

3

e) $2.004 : 9 = 222$ Rest:

6
6
6
2

 →

$222 : 9 = 24$ Rest:

6
6
6

$24 : 9 = 2$ Rest:

6
6

$2 : 9 = 0$ Rest:

2

6.)

Stellen Sie die Dezimalzahl 1.443_{10} im 5er-, 7er-, 9er-, 11er- und 13er-Zahlensystem dar!

a) $1.443 : 5 = 288$ Rest:

3

 $288 : 5 = 57$ Rest:

3

 $57 : 5 = 11$ Rest:

2

 $11 : 5 = 2$ Rest:

1

 $2 : 5 = 0$ Rest:

2

 →

b) $1.443 : 7 = 206$ Rest:

1

 $206 : 7 = 29$ Rest:

3

 $29 : 7 = 4$ Rest:

1

 $4 : 7 = 0$ Rest:

4

 →

c) $1.443 : 9 = 160$ Rest:

3

 $160 : 9 = 17$ Rest:

7

 $1 : 9 = 1$ Rest:

8

 $1 : 9 = 0$ Rest:

1

 →

d) $1.443 : 11 = 131$ Rest:

2

 $131 : 11 = 11$ Rest:

10

 $11 : 11 = 1$ Rest:

0

 $1 : 11 = 0$ Rest:

1

 →

e) $1.443 : 13 = 111$ Rest:

0

 $111 : 13 = 8$ Rest:

7

 $8 : 13 = 0$ Rest:

8

 →

7.)

Vervollständigen Sie folgende Tabelle!

	5-er	6-er	7-er	9-er	10-er	11-er	12-er	13-er
123_5								
123_6								
123_7								
123_9								
123_{10}								
123_{11}								
123_{12}								
123_{13}								

3 Das Rechnen im Dualsystem

3.1 Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Dualzahlen

Das Dualsystem (auch: Binärsystem) ist ein Stellenwertsystem, das auf der Grundzahl 2 basiert. Im Dualsystem gelten die Ziffern 0 und 1. Die Stellenwerte einer Dualzahl verlaufen von rechts nach links wie folgt: 1, 2, 4, 8, 16, 32 usw.

z. B.: Welcher Dualzahl entspricht der Dezimalwert $53,34375_{10}$?

53 : 2 =	26	Rest:	1	↑	110101 ₂
26 : 2 =	13	Rest:	0		
13 : 2 =	6	Rest:	1		
6 : 2 =	3	Rest:	0		
3 : 2 =	1	Rest:	1		
1 : 2 =	0	Rest:	1		

0,34375	• 2 =	0	,6875	↓	0,01011 ₂
0,6875	• 2 =	1	,375		
0,375	• 2 =	0	,75		
0,75	• 2 =	1	,5		
0,5	• 2 =	1	,0		

8.) Welcher Dualzahl entspricht der Dezimalwert $23,9375_{10}$?

23 : 2 =	11	Rest:	1	↑	→	0,9375	• 2 =	1	,875	↓
11 : 2 =	5	Rest:	1			0,875	• 2 =	1	,75	
5 : 2 =	2	Rest:	1			0,75	• 2 =	1	,5	
2 : 2 =	1	Rest:	0			0,5	• 2 =	1	,0	
1 : 2 =	0	Rest:	1			←				

9.) Welcher Dualzahl entspricht der Dezimalwert $17,78125_{10}$?

17 : 2 =	8	Rest:	1	↑	→	0,78125	• 2 =	1	,5625	↓	
8 : 2 =	4	Rest:	0			0,5625	• 2 =	1	,25		
4 : 2 =	2	Rest:	0			0,125	• 2 =	0	,25		
2 : 2 =	1	Rest:	0			0,25	• 2 =	0	,5		
1 : 2 =	0	Rest:	1			←	0,5	• 2 =	1		,0

3.2 Das Umrechnen von Dualzahlen in Dezimalzahlen

z. B.: $101011,11_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$
 $= 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
 $= \mathbf{43,75_{10}}$

10.) Welchem Dezimalwert entspricht die Dualzahl **11011,101**₂ ?

$$\begin{aligned} 11011,101_2 &= 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} \\ &= 16 + 8 + 0 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{8} \\ &= \end{aligned}$$

11.) Welchem Dezimalwert entspricht die Dualzahl **10011,1001**₂ ?

$$\begin{aligned} 10011,1001_2 &= 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \\ &= 16 + 0 + 0 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + 0 + 0 + \frac{1}{16} \\ &= \end{aligned}$$

3.3 Das Grundrechnen mit Dualzahlen

<u>z. B.:</u> $\begin{array}{r} 1\ 0\ 1\ 1\ ,\ 0\ 1 \\ +\ 1\ 1\ 0\ 0\ ,\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ ,\ 0\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11,25 \\ +\ 12,75 \\ \hline 24,00 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ ,\ 0\ 1 \\ -\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ ,\ 1\ 1 \\ \hline 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ ,\ 1\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 38,25 \\ -\ 19,75 \\ \hline 18,50 \end{array}$
--	--	--	--

<u>z. B.:</u> $\begin{array}{r} 1011,101 \cdot 11,1 \\ \hline 1011101 \\ 1011101 \\ 1011101 \\ \hline 101000,1011 \end{array}$	$\begin{array}{r} 11,625 \cdot 3,5 \\ \hline 34875 \\ 58125 \\ \hline 40,6875 \end{array}$
---	--

12.) Addieren Sie im Dualsystem!

a)

$1\ 1\ 0\ 1\ ,\ 1\ 1$	13,75
$+ 1\ 1\ 0\ ,\ 1\ 0$	$+ 6,50$
\hline	$\hline 20,25$

b)

$1\ 1\ 1\ 0\ 1\ ,\ 0\ 0$	29,00
$+ 1\ 0\ 0\ 1\ ,\ 0\ 1$	$+ 9,25$
\hline	$\hline 38,25$

c)

$1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ ,\ 1\ 1$	61,75
$+ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ ,\ 0\ 1$	$+ 27,25$
\hline	$\hline 89,00$

13.) Subtrahieren Sie im Dualsystem!

a)

$1\ 1\ 0\ 1\ ,\ 1\ 1$	13,75
$- 1\ 1\ 0\ ,\ 1\ 0$	$- 6,50$
\hline	$\hline 7,25$

b)

$1\ 1\ 1\ 0\ 1\ ,\ 0\ 0$	29,00
$- 1\ 0\ 0\ 1\ ,\ 0\ 1$	$- 9,25$
\hline	$\hline 19,75$

c)

$1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ ,\ 1\ 1$	61,75
$- 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ ,\ 0\ 1$	$- 27,25$
\hline	$\hline 34,50$

4 Das Rechnen im Hexadezimalsystem

4.1 Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Hexadezimalzahlen

Das Hexadezimalsystem ist ein Stellenwertsystem, das auf der Grundzahl 16 basiert. Im Dualsystem gelten die Ziffern 0, 1, 2, ... 9, A, B, C, D, E und F. Die Stellenwerte einer Hexadezimalzahl verlaufen von rechts nach links wie folgt: 1, 16, 256, 4.096 usw.

Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Hexadezimalzahlen erfolgt über den Zwischenschritt Dualsystem. Die dabei ermittelte Dualzahl wird in Viererblöcken (Tetraden) zusammengefasst.

$$\begin{aligned} \text{z. B.: } 147_{10} &= 144 + 3 \\ &= 9 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = \mathbf{93}_{16} \end{aligned}$$

$$\text{oder: } \begin{array}{ccccccc} 128 & + & 16 & + & 2 & + & 1 & = \\ 2^7 & + & 2^4 & + & 2^1 & + & 2^0 & = \end{array} \boxed{1001} \boxed{0011} = \mathbf{93}_{16}$$

$$\text{oder: } \begin{array}{l} 147 : 16 = 9 \text{ Rest: } \boxed{3} \\ 9 : 16 = 0 \text{ Rest: } \boxed{9} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \end{array} \mathbf{93}_{16}$$

$$\begin{array}{l} \text{z. B.: } 0,34375 \cdot 16 = \boxed{5},5 \\ 0,5 \cdot 16 = \boxed{8},0 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \rightarrow \end{array} \mathbf{0,58}_{16}$$

14.) Stellen Sie die Dezimalzahl $112,375_{10}$ als Hexadezimalzahl dar!

$$\begin{aligned} 112,375_{10} &= 112 + 0 + 0,375 \\ &= 7 \cdot 16^1 + 0 \cdot 16^0 + 6 \cdot 16^{-1} = \end{aligned}$$

$$\text{oder: } \begin{array}{ccccccc} 64 & + & 32 & + & 16 & + & 1/4 & + & 1/8 \\ 2^6 & + & 2^5 & + & 2^4 & + & 2^{-2} & + & 2^{-3} \end{array} = \boxed{0111} \boxed{0000}, \boxed{0110} =$$

$$\text{oder: } \begin{array}{l} 112 : 16 = 7 \text{ Rest: } \boxed{0} \\ 7 : 16 = 0 \text{ Rest: } \boxed{7} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \rightarrow \end{array} \begin{array}{l} 0,375 \cdot 16 = \boxed{6},0 \\ \leftarrow \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \end{array}$$


15.)


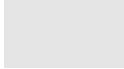

Stellen Sie die Dezimalzahl **193,625**₁₀ als Hexadezimalzahl dar!


$$\begin{aligned} 193,625_{10} &= 192 + 1 + \frac{10}{16} \\ &= 12 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 + 10 \cdot 16^{-1} = \end{aligned}$$

oder: $128 + 64 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$$2^7 + 2^6 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-3} = \boxed{1100} \boxed{0001}, \boxed{1010} =$$

oder: $193 : 16 = 12 \text{ Rest: } \boxed{1}$ 

$12 : 16 = 0 \text{ Rest: } \boxed{12}$   

$0,625 \cdot 16 = \boxed{10}, \mathbf{0}$ 

4.2 Das Umrechnen von Hexadezimalzahlen in Dezimalzahlen

Das Umrechnen von Zahlen aus dem Hexadezimalsystem in das Dezimalsystem erfolgt ebenfalls über den Zwischenschritt Dualsystem. D. h., jeweils eine Dualtetrade entspricht einer Hexadezimalziffer.

z. B.: $1A7_{16} = 1 \quad A \quad 7$
 $1 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0$
 $256 + 160 + 7 = 423_{10}$

oder:

0001	1010	0111
------	------	------

$$2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$256 + 128 + 32 + 4 + 2 + 1 = 423_{10}$$

16.) Welchem Dezimalwert entspricht die Hexadezimalzahl **2CB**₁₆ ?

$$2CB_{16} = 2 \quad C \quad B$$

$$2 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 11 \cdot 16^0$$

$$512 + 192 + 11 = \text{[]}$$

oder:

0010	1100	1011
------	------	------

$$2^9 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0$$

$$512 + 128 + 64 + 8 + 2 + 1 = \text{[]}$$

17.) Welchem Dezimalwert entspricht die Hexadezimalzahl **0815**₁₆ ?

$$815_{16} = 8 \quad 1 \quad 5$$

$$8 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0$$

$$2.048 + 16 + 5 = \text{[]}$$

oder:

1000	0001	0101
------	------	------

$$2^{11} + 2^5 + 2^2 + 2^0$$

$$2.048 + 16 + 4 + 1 = \text{[]}$$

4.3 Das Grundrechnen mit Hexadezimalzahlen

z. B.:

$$\begin{array}{r} 3F8,8 \\ + 769,9 \\ \hline \mathbf{B62,1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1.016,5000 \\ + 1.897,5625 \\ \hline 2.914,0625 \end{array}$$

z. B.:

$$\begin{array}{r} 769,9 \\ - 3F8,8 \\ \hline \mathbf{371,1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1.897,5625 \\ - 1.016,5000 \\ \hline 881,0625 \end{array}$$

18.) Addieren Sie im Hexadezimalsystem!

a)

$$\begin{array}{r} 6AB,5 \\ + 3CE,A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1.707,3125 \\ + 974,6250 \\ \hline 2.681,9375 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 9DE,6 \\ + 4A1,1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.526,3750 \\ + 1.185,0625 \\ \hline 3.711,4375 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 83C,1 \\ + B4,A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.108,0625 \\ + 180,6250 \\ \hline 2.288,6875 \end{array}$$

19.) Subtrahieren Sie im Hexadezimalsystem!

a)

$$\begin{array}{r} 6AB,5 \\ - 3CE,A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1.707,3125 \\ - 974,6250 \\ \hline 732,6875 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 9DE,6 \\ - 4A1,1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.526,3750 \\ - 1.185,0625 \\ \hline 1.341,3125 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 83C,1 \\ - B4,A \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2.108,0625 \\ - 180,6250 \\ \hline 1.927,4375 \end{array}$$

5 Das Rechnen im Oktalsystem

5.1 Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Oktalzahlen

Das Oktalsystem ist ein Stellenwertsystem, das auf der Grundzahl 8 basiert. Im Oktalsystem gelten die Ziffern 0, 1, 2, ... 7. Die Stellenwerte einer Oktalzahl verlaufen von rechts nach links wie folgt: 1, 8, 64, 512, 4.096 usw.

Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Oktalzahlen erfolgt über den Zwischenschritt Dualsystem. Die dabei ermittelte Dualzahl wird in Dreierblöcken (Triaden) zusammengefasst.

z. B.: $147_{10} = 128 + 16 + 3 = 2 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = \mathbf{223_8}$

oder:

2	2	3
010	010	111

$2^7 + 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$
 $128 + 16 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{147_{10}}$

oder:

$147 : 8 = 18$	Rest:	3		→	223_8
$18 : 8 = 2$	Rest:	2			
$2 : 8 = 0$	Rest:	2			

z. B.: $0,34375 \cdot 8 = \frac{2}{8} ,75$
 $0,75 \cdot 8 = \frac{6}{8} ,0$ → $0,26_8$

20.)

Stellen Sie den Dezimalwert **92,25₁₀** als Oktalzahl dar!

$$92,25_{10} = 64 + 24 + 4 + \frac{1}{4}$$

$$= 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} = \text{[]}$$

oder:

$$64 + 24 + 4 + \frac{1}{4}$$

$$1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1}$$

001	011	100	,	010	=	[]
-----	-----	-----	---	-----	---	-----

oder:

92 : 8 = 11 Rest:	4	↑	→		←	0,25 · 8 =	2	,0	↓
11 : 8 = 1 Rest:	3								
1 : 8 = 0 Rest:	1								

21.)

Stellen Sie den Dezimalwert **87,75₁₀** als Oktalzahl dar!

$$87,75_{10} = 64 + 16 + 7 + \frac{3}{4}$$

$$= 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1} = \text{[]}$$

oder:

$$64 + 16 + 7 + \frac{3}{4}$$

$$1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 6 \cdot 8^{-1}$$

001	010	111	,	110	=	[]
-----	-----	-----	---	-----	---	-----

oder:

87 : 8 = 10 Rest:	7	↑	→		←	0,75 · 8 =	6	,0	↓
10 : 8 = 1 Rest:	2								
1 : 8 = 0 Rest:	1								

5.2 Das Umrechnen von Oktalzahlen in Dezimalzahlen

Das Umrechnen von Zahlen aus dem Oktalsystem in das Dezimalsystem erfolgt ebenfalls über den Zwischenschritt Dualsystem. D. h., jeweils eine Dualtriade entspricht einer Oktalziffer.

$$\begin{aligned} \underline{\text{z. B.:}} \quad 147_8 &= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 \\ &= 64 + 32 + 7 = \mathbf{103_{10}} \end{aligned}$$

oder:

1	4	7		
001	100	111		
$1 \cdot 8^2 +$	$4 \cdot 8^1 +$	$7 \cdot 8^0$		
64 +	32 +	7	=	$\mathbf{103_{10}}$

22.) Welchem Dezimalwert entspricht die Oktalzahl 4.711_8 ?

$$\begin{aligned} 4711_8 &= 4 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 \\ &= 4 \cdot 512 + 7 \cdot 64 + 1 + 1 \\ &= 2.048 + 448 + 8 + 1 = \end{aligned}$$

oder:

4	7	1	1		
100	111	001	001		
$2^{11} +$	$2^8 + 2^7 + 2^6 +$	$2^3 +$	2^0		
2.048 +	256 + 128 + 64	+ 8 +	1	=	

23.) Welchem Dezimalwert entspricht die Oktalzahl $237,2_8$?

$$\begin{aligned} 237,2_8 &= 2 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0 + 2 \cdot 8^{-1} \\ &= 2 \cdot 64 + 3 \cdot 8 + 7 \cdot 1 + \frac{2}{8} \\ &= 128 + 24 + 7 + 1 = \end{aligned}$$

oder:

2	3	7	,	2		
010	011	111	,	010		
$2^7 +$	$2^4 + 2^3 +$	$2^2 + 2^1 + 2^0 +$		2^0		
128 +	16 + 8 +	4 + 2 + 1 +		$\frac{1}{4}$	=	

5.3 Das Grundrechnen mit Oktalzahlen

z. B.:
$$\begin{array}{r} 645,5_8 \\ + 372,7_8 \\ \hline 1240,4_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 421,625_{10} \\ + 250,875_{10} \\ \hline 672,500_{10} \end{array}$$
 z. B.:
$$\begin{array}{r} 645,5_8 \\ - 372,7_8 \\ \hline 252,6_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 421,625_{10} \\ - 250,875_{10} \\ \hline 170,750_{10} \end{array}$$

24.) Addieren Sie im Oktalsystem!

a)
$$\begin{array}{r} 365,3_8 \\ + 256,4_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 245,375_{10} \\ + 174,500_{10} \\ \hline 419,875_{10} \end{array}$$
 b)
$$\begin{array}{r} 623,1_8 \\ + 234,6_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 403,125_{10} \\ + 156,750_{10} \\ \hline 559,875_{10} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 453,2_8 \\ + 375,6_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 299,250_{10} \\ + 253,750_{10} \\ \hline 553,000_{10} \end{array}$$
 d)
$$\begin{array}{r} 135,1_8 \\ + 132,7_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 93,125_{10} \\ + 90,875_{10} \\ \hline 184,000_{10} \end{array}$$

25.) Subtrahieren Sie im Oktalsystem!

a)
$$\begin{array}{r} 365,3_8 \\ - 256,4_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 245,375_{10} \\ - 174,500_{10} \\ \hline 70,875_{10} \end{array}$$
 b)
$$\begin{array}{r} 623,1_8 \\ - 234,6_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 403,125_{10} \\ - 156,750_{10} \\ \hline 246,375_{10} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 453,2_8 \\ - 375,6_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 299,250_{10} \\ - 253,750_{10} \\ \hline 45,500_{10} \end{array}$$
 d)
$$\begin{array}{r} 135,1_8 \\ - 132,7_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 93,125_{10} \\ - 90,875_{10} \\ \hline 2,250_{10} \end{array}$$

6 Das Rechnen im Quartalsystem

6.1 Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Quartalzahlen

Das Quartalsystem ist ein Stellenwertsystem, das auf der Grundzahl 4 basiert. Im Quartalsystem gelten die Ziffern 0, 1, 2 und 3. Die Stellenwerte einer Quartalzahl verlaufen von rechts nach links wie folgt: 1, 4, 16, 64, 256 usw.

Das Umrechnen von Dezimalzahlen in Quartalzahlen erfolgt über den Zwischenschritt Dualsystem. Die dabei ermittelte Dualzahl wird in Zweierblöcken zusammengefasst.


z. B.: $147_{10} = 128 + 16 + 0 + 3$
 $2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = \mathbf{2103_4}$

oder:

2	1	0	3
10	01	00	11


$2^7 \quad 2^4 \quad 0 \quad 2^1 + 2^0$
 $128 + 16 + 0 + 2 + 1 = \mathbf{147_{10}}$

oder:

$147 : 4 = 36$	Rest:	3	
$36 : 4 = 9$	Rest:	0	
$9 : 4 = 2$	Rest:	1	
$2 : 4 = 0$	Rest:	2	

$\rightarrow \mathbf{2103_4}$

z. B.:

$0,34375 \cdot 4 =$	1	,375	
$0,375 \cdot 4 =$	1	,5	
$0,5 \cdot 4 =$	2	,0	

$\rightarrow \mathbf{0,112_4}$

26.)

Stellen Sie den Dezimalwert $42\frac{1}{2}_{10}$ als Quartalzahl dar!

$$42,5_{10} = 32 + 8 + 2 + \frac{1}{2}$$

$$= 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1} = \text{[]}$$

oder:

$$32 + 8 + 2 + \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^{-1}$$

10	10	10	,	10	=	
----	----	----	---	----	---	--

oder:

$42 : 4 = 10$	Rest:	2	↑	→		←
$10 : 4 = 2$	Rest:	2				
$2 : 4 = 0$	Rest:	2				

$0,5 \cdot 4 =$	2	,	0	↓
-----------------	---	---	---	---

27.)

Stellen Sie den Dezimalwert $36\frac{3}{4}_{10}$ als Quartalzahl dar!

$$36,75_{10} = 32 + 4 + 0 + \frac{3}{4}$$

$$= 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 0 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^{-1} = \text{[]}$$

oder:

$$32 + 4 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$2 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

10	01	00	,	11	=	
----	----	----	---	----	---	--

oder:

$36 : 4 = 9$	Rest:	0	↑	→		←
$9 : 4 = 2$	Rest:	1				
$2 : 4 = 0$	Rest:	2				

$0,75 \cdot 4 =$	3	,	0	↓
------------------	---	---	---	---

6.2 Das Umrechnen von Quartalzahlen in Dezimalzahlen

Das Umrechnen von Zahlen aus dem Quartalsystem in das Dezimalsystem erfolgt ebenfalls über den Zwischenschritt Dualsystem.

z. B.: $132_4 = 1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0$
 $= 16 + 12 + 2 = 30_{10}$

oder:

1	3	2
01	11	10

$$1 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$$

$$16 + 12 + 1 = 30_{10}$$

28.) Welchem Dezimalwert entspricht die Quartalzahl **21,33**₄ ?

$$21,33_4 = 2 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 + 3 \cdot 4^{-1} + 3 \cdot 4^{-2}$$

$$= 2 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{16}$$

$$= 8 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \text{_____}$$

oder:

2	1	3	3
10	01	,	11 11

$$2^3 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4}$$

$$8 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \text{_____}$$

29.) Welchem Dezimalwert entspricht die Quartalzahl **11,22**₄ ?

$$11,22_4 = 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1} + 2 \cdot 4^{-2}$$

$$= 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{16}$$

$$= 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \text{_____}$$

oder:

1	1	2	2
01	01	,	10 10

$$2^2 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2}$$

$$4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \text{_____}$$

6.3 Das Grundrechnen mit Quartalzahlen

<u>z. B.:</u>	$\begin{array}{r} 301,2_4 \\ + 212,3_4 \\ \hline 1120,1_4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 49,50_{10} \\ + 38,75_{10} \\ \hline 88,25_{10} \end{array}$	<u>z. B.:</u>	$\begin{array}{r} 301,2_4 \\ - 212,3_4 \\ \hline 22,3_4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 49,50_{10} \\ - 38,75_{10} \\ \hline 10,75_{10} \end{array}$
---------------	--	--	---------------	--	--

30.) Addieren Sie im Quartalsystem!

a)	$\begin{array}{r} 312,2_4 \\ + 123,3_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 54,50_{10} \\ + 27,75_{10} \\ \hline 82,25_{10} \end{array}$	b)	$\begin{array}{r} 232,1_4 \\ + 133,2_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 46,25_{10} \\ + 31,50_{10} \\ \hline 77,75_{10} \end{array}$
c)	$\begin{array}{r} 300,2_4 \\ + 211,3_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 48,50_{10} \\ + 37,75_{10} \\ \hline 86,25_{10} \end{array}$			

31.) Subtrahieren Sie im Quartalsystem!

a)	$\begin{array}{r} 312,2_4 \\ - 123,3_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 54,50_{10} \\ - 27,75_{10} \\ \hline 26,75_{10} \end{array}$	b)	$\begin{array}{r} 232,1_4 \\ - 133,2_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 46,25_{10} \\ - 31,50_{10} \\ \hline 14,75_{10} \end{array}$
c)	$\begin{array}{r} 300,2_4 \\ - 211,3_4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 48,50_{10} \\ - 37,75_{10} \\ \hline 10,75_{10} \end{array}$			

7 Das Umrechnen zwischen Hexadezimal-, Oktal-, Quartal- und Dualsystem

Werden die Ziffern einer Dualzahl beginnend ab dem Komma zu Zweier-, Dreier- (auch: Triaden) oder Viererblöcken (auch: Tetraden) zusammengefasst, ergeben sich die Ziffern der gleichwertigen Quartal-, Oktal- bzw. Hexadezimalzahl.

z. B.: Wandeln Sie die Dualzahl $110110010,0111_2$ in eine Quartal-, eine Oktal- und eine Hexadezimalzahl!

$$110110010,0111_2 = \boxed{01} \boxed{10} \boxed{11} \boxed{00} \boxed{10} , \boxed{01} \boxed{11} = \mathbf{12302,13_4}$$

$$110110010,0111_2 = \boxed{110} \boxed{110} \boxed{010} , \boxed{011} \boxed{100} = \mathbf{662,34_8}$$

$$110110010,0111_2 = \boxed{0001} \boxed{1011} \boxed{0010} , \boxed{0111} = \mathbf{1B2,7_{16}}$$

32.) Wandeln Sie die Dualzahl $100101010,1010_2$ in eine Quartal-, eine Oktal- und eine Hexadezimalzahl!

$$100101010,1010_2 = \boxed{01} \boxed{00} \boxed{10} \boxed{10} \boxed{10} , \boxed{10} \boxed{10} = \text{_____}$$

$$100101010,1010_2 = \boxed{100} \boxed{101} \boxed{010} , \boxed{101} \boxed{000} = \text{_____}$$

$$100101010,1010_2 = \boxed{0001} \boxed{0010} \boxed{1010} , \boxed{1010} = \text{_____}$$

33.) Wandeln Sie die Dualzahl $1110010011,0101_2$ in eine Quartal-, eine Oktal- und eine Hexadezimalzahl!

$$1110010011,0101_2 = \boxed{11} \boxed{10} \boxed{01} \boxed{00} \boxed{11} , \boxed{01} \boxed{01} = \text{_____}$$

$$1110010011,0101_2 = \boxed{001} \boxed{110} \boxed{010} \boxed{011} , \boxed{010} \boxed{100} = \text{_____}$$

$$1110010011,0101_2 = \boxed{0011} \boxed{1001} \boxed{0011} , \boxed{0101} = \text{_____}$$

34.) Wandeln Sie die Quartalzahl $1233,23_4$ in eine Oktal- und eine Hexadezimalzahl!

$$\begin{aligned} 1233,23_4 &= \boxed{01} \boxed{10} \boxed{11} \boxed{11} , \boxed{10} \boxed{11} \\ &= \boxed{001} \boxed{101} \boxed{111} , \boxed{101} \boxed{100} = \text{_____} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1233,23_4 &= \boxed{01} \boxed{10} \boxed{11} \boxed{11} , \boxed{10} \boxed{11} \\ &= \boxed{0110} \boxed{1111} , \boxed{1011} = \text{_____} \end{aligned}$$

35.) Wandeln Sie die Quartalzahl **1302,02₄** in eine Oktal- und eine Hexadezimalzahl!

$$\begin{aligned}
 1302,02_4 &= \boxed{01} \boxed{11} \boxed{00} \boxed{10}, \boxed{00} \boxed{10} \\
 &= \boxed{001} \boxed{110} \boxed{010}, \boxed{001} = \text{ } \\
 1302,02_4 &= \boxed{01} \boxed{11} \boxed{00} \boxed{10}, \boxed{00} \boxed{10} \\
 &= \boxed{0111} \boxed{0010}, \boxed{0010} = \text{ }
 \end{aligned}$$

36.) Wandeln Sie die Oktalzahl **2307,57₈** in eine Quartal- und eine Hexadezimalzahl!

$$\begin{aligned}
 2307,57_8 &= \boxed{010} \boxed{011} \boxed{000} \boxed{111}, \boxed{101} \boxed{100} \\
 &= \boxed{01} \boxed{00} \boxed{11} \boxed{00} \boxed{01} \boxed{11}, \boxed{10} \boxed{11} = \text{ } \\
 2307,57_8 &= \boxed{010} \boxed{011} \boxed{000} \boxed{111}, \boxed{101} \boxed{100} \\
 &= \boxed{0100} \boxed{1100} \boxed{0111}, \boxed{1011} = \text{ }
 \end{aligned}$$

37.) Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte!

	Dual-system	Quartal-system	Oktal-system	Dezimal-system	Hexadezimal-system
Dual-system	10101010101				
Quartal-system		12121			
Oktal-system			707		
Dezimal-system				481	
Hexadez.-system					19D

Witz:
 Warum verwechseln Mathematiker immer Weihnachten und Halloween? – Weil 31 oktal gleich 25 dezimal ist.