Das Integralrechnen

1 Das Integralrechnen mit Integrationsgrenzen

Mithilfe der Integralrechnung können Flächeninhalte berechnet werden, z. B. zwischen mehreren Funktionen oder unterhalb einer Funktion.

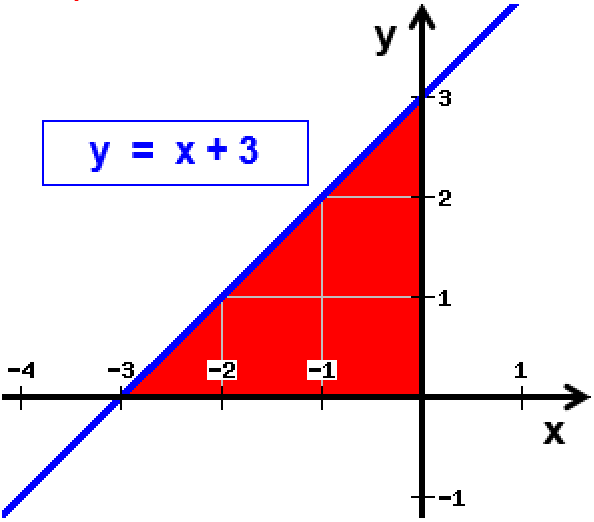
① $A = \int_{-3}^{0} (x + 3)\,dx$

② $= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-3}^{0}$

③ $= (½ \cdot 0^2 + 3 \cdot 0) – (½ \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3))$

$= 0 – (½ \cdot 9 – 9)$

$=$ **4,5 FE**



Arbeitsschritte beim Integrieren:

① Die Funktion **$y = x + 3$** integrieren.
(Ergebnis: $\frac{1}{2}x^2 + 3x$)

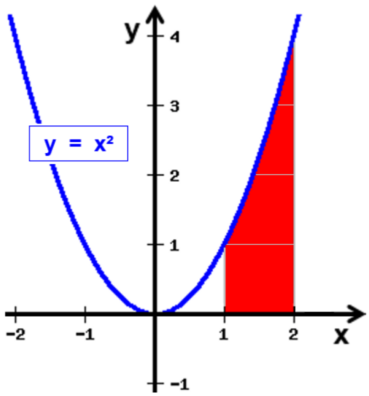
② Diese Stammfunktion (hier: $\frac{1}{2}x^2 + 3x$) wird in eckige Klammern gesetzt und mit den Integrationsgrenzen versehen.
Im Beispiel ist die obere Grenze = 0 und die untere Grenze = –3.

③ Funktion mit den beiden Integrationsgrenzen ausrechnen.

1.) Berechnen Sie für das Intervall

$$1 \le x \le 2$$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = x^2$** und der x-Achse!



$$A = \int_1^2 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_1^2$$

$$= {}^1/_3 \cdot 2^3 - {}^1/_3 \cdot 1^3$$

$$= {}^8/_3 - {}^1/_3$$

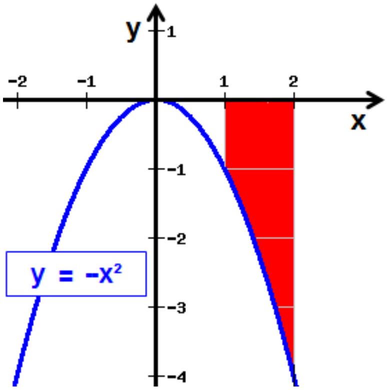
$$= {}^7/_3$$

$$= \mathbf{2\,{}^1/_3\ FE}$$

2.) Berechnen Sie für das Intervall

$1 \leq x \leq 2$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = -x^2$** und der x-Achse!



$$A = \int_1^2 -x^2 \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3\right]_1^2$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3} \cdot 2^3\right) - \left(-\tfrac{1}{3} \cdot 1^3\right)$$

$$= -\tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{3}$$

$$= \left|-\tfrac{7}{3}\right|$$

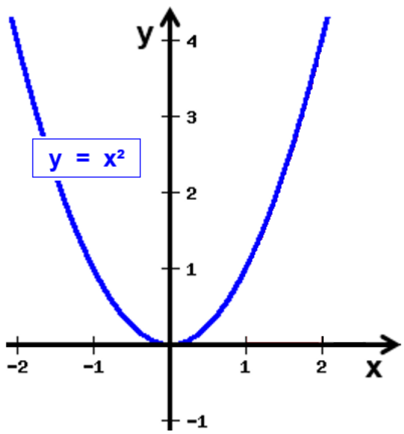
$$= \tfrac{7}{3}$$

$$= \mathbf{2\tfrac{1}{3}\ FE}$$

2 Der Unterschied zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral

Ein unbestimmtes Integral besitzt keine Integrations-grenzen, die Lösung einer Aufgabe mit einem un-bestimmten Integral ist eine Stammfunktion.

Beispiel:
Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = x^2$** und der x-Achse!



$$A = \int x^2 \, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3} x^3 + C \right]$$

Ein bestimmtes Integral besitzt Integrationsgrenzen, die Lösung einer Aufgabe mit einem bestimmten Integral ist ein einfacher Zahlenwert.

$$A = \int_1^2 x^2 \, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3} x^3 + C \right]_1^2$$

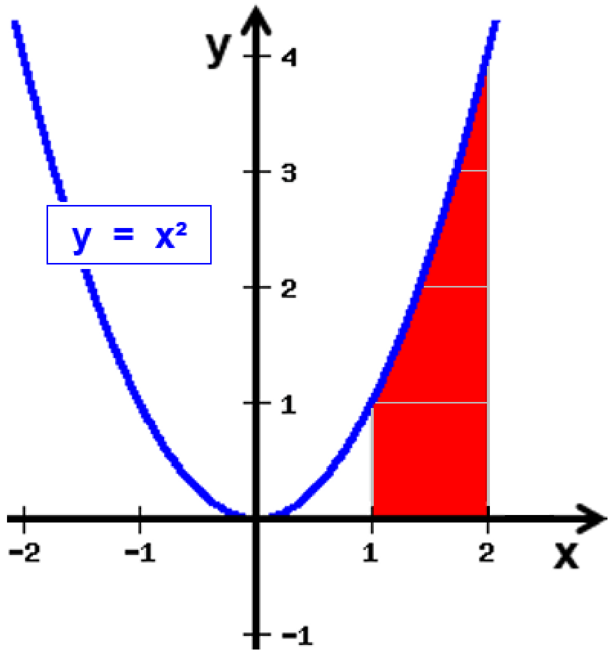
$$= {}^1/_3 \cdot 2^3 + C - ({}^1/_3 \cdot 1^3 + C)$$

$$= {}^8/_3 + C - {}^1/_3 - C$$

$$= \mathbf{{}^7/_3}$$

$$= \mathbf{2\,{}^1/_3 \text{ FE}}$$

Beim bestimmten Integral hat die additive Konstante C keinen Einfluss auf den Zahlenwert.

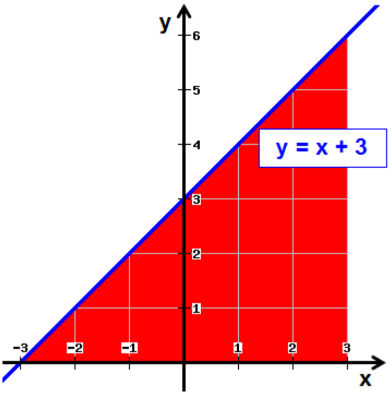


3 Der Wechsel über die x-Achse beim bestimmten Integral

3.) Berechnen Sie für das Intervall

$-3 \leq x \leq 3$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion **y = x + 3** und der x-Achse!



$$A = \int_{-3}^{3} (x+3)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-3}^{3}$$

$$= (\tfrac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3) - (\tfrac{1}{2} \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3))$$

$$= \tfrac{9}{2} + 9 - (\tfrac{9}{2} - 9)$$

$$= \tfrac{9}{2} + 9 - \tfrac{9}{2} + 9$$

$$= \mathbf{18\ FE}$$

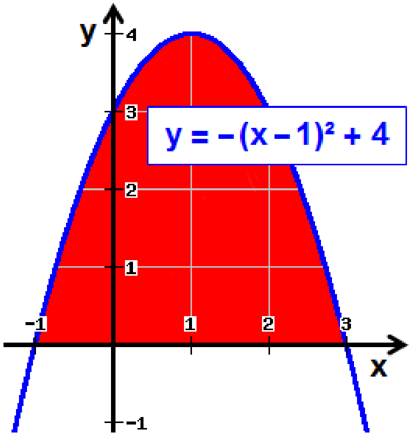
4.) Berechnen Sie für das Intervall

$-1 \leq x \leq 3$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion

$y = -(x-1)^2 + 4$

und der x-Achse!



$$A = \int_{-1}^{3} (-(x-1)^2 + 4)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-(x^2 - 2x + 1) + 4)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x - 1 + 4)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$= (-\tfrac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2 + 3 \cdot 3) - (-\tfrac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 3 \cdot (-1))$$

$$= (-\tfrac{1}{3} \cdot 27 + 9 + 9) - (-\tfrac{1}{3} \cdot (-1) + 1 - 3)$$

$$= (-9 + 9 + 9) - (\tfrac{1}{3} + 1 - 3)$$

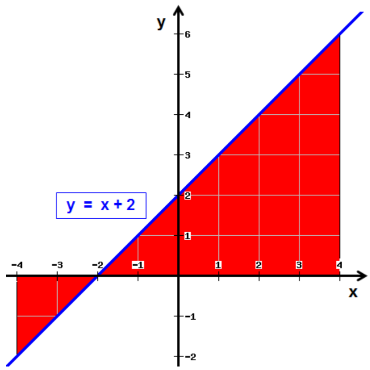
$$= 9 + \tfrac{5}{3}$$

$$= \mathbf{10\tfrac{2}{3}\ FE}$$

5.) Berechnen Sie für das Intervall

$$-4 \leq x \leq 4$$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion **y = x + 2** und der x-Achse!



$$A = \int_{-4}^{4} (x+2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-4}^{4}$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4\right) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4)\right)$$

$$= (\ 8 \ + \ 8\ ) - (\ 8 \ - \ 8\ )$$

$$= \ 16 \ - \ 0$$

= **16 FE** **Falsch!**

Achtung beim Wechsel über die x-Achse!

Der Wechsel über die y-Achse ist problemlos.

$$A = \int_{-4}^{-2} (x+2)\,dx + \int_{-2}^{4} (x+2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-4}^{-2} + \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{4}$$

$$= \left(\left(\tfrac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2)\right) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4)\right)\right)$$

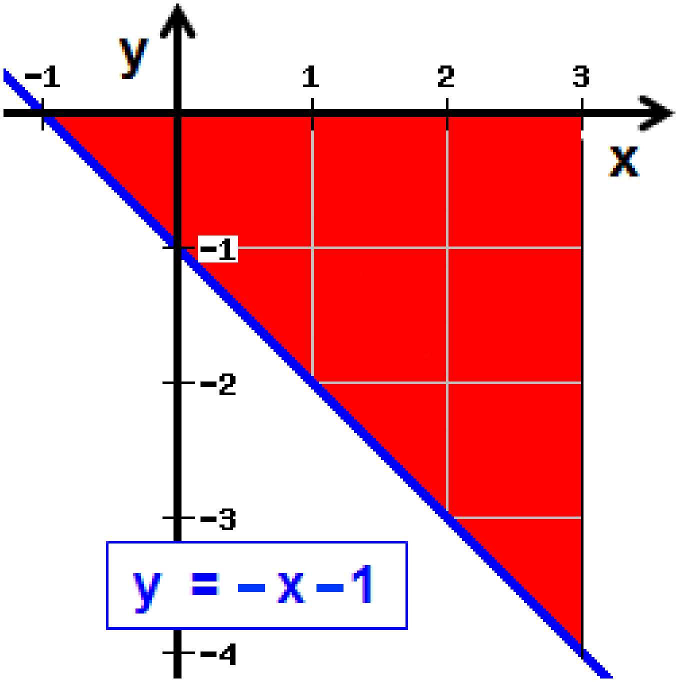
$$+ \left(\left(\tfrac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4\right) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2)\right)\right)$$

$$= \left| 2 - 4 - 8 + 8 \right| + (8 + 8 - 2 + 4)$$

$$= \left| -2 \right| + 18$$

= **20 FE**

6.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \leq x \leq 3$ den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und der Funktion **$y = -x - 1$** !



$$A = \int_{-1}^{3} (-x-1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x\right]_{-1}^{3}$$

$$= (-\tfrac{1}{2} \cdot 3^2 - 3) - (-\tfrac{1}{2} \cdot (-1)^2 - (-1))$$

$$= -7{,}5 - 0{,}5$$

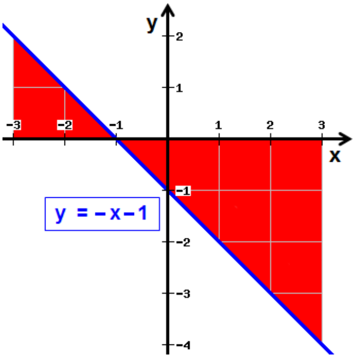
$$= |-8|$$

= **8 FE**

7.) Berechnen Sie für das Intervall

$-3 \leq x \leq 3$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = -x - 1$** und der x-Achse!



$$A = \int_{-3}^{3} (-x - 1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x \right]_{-3}^{3}$$

$$= (-\tfrac{1}{2} \cdot 3^2 - 3) - (-\tfrac{1}{2} \cdot (-3)^2 - (-3))$$

$$= -7{,}5 + 1{,}5$$

$$= |-6|$$

$= \mathbf{6\ FE}$ **Falsch!**

Achtung beim Wechsel über die x-Achse!

$$A = \int_{-3}^{-1} (-x - 1)\,dx + \int_{-1}^{3} (-x - 1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x \right]_{-3}^{-1} + \left[-\frac{1}{2}x^2 - x \right]_{-1}^{3}$$

$$= ((-\tfrac{1}{2} \cdot (-1)^2 - (-1)) - (-\tfrac{1}{2} \cdot (-3)^2 - (-3))$$
$$+ ((-\tfrac{1}{2} \cdot 3^2 - 3) - (-\tfrac{1}{2} \cdot (-1)^2 - (-1))$$

$$= |-0{,}5 + 1 - (-4{,}5 + 3)| + |-4{,}5 - 3 - (-0{,}5 + 1)|$$

$$= |-0{,}5 + 1 + 4{,}5 - 3| + |-4{,}5 - 3 + 0{,}5 - 1)|$$

$$= |2| + |-8|$$

$= \mathbf{10\ FE}$

8.) Berechnen Sie folgende Integrale!

a) $\int_{-2}^{0} x \, dx$

$= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-2}^{0}$

$= {}^{0}/_{2} - {}^{4}/_{2} = -2$

$=$ **2 FE**

b) $\int_{0}^{2} x^2 \, dx$

$= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{0}^{2}$

$= {}^{8}/_{3} - {}^{0}/_{3} = {}^{8}/_{3}$

$=$ **$2^2/_3$ FE**

c) $\int_{-1}^{2} (2 - x) \, dx$

$= \left[2x - \frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^{2}$

$= (4 - 2) - (-2 - ½)$

$= 2 + 2,5$

$=$ **4,5 FE**

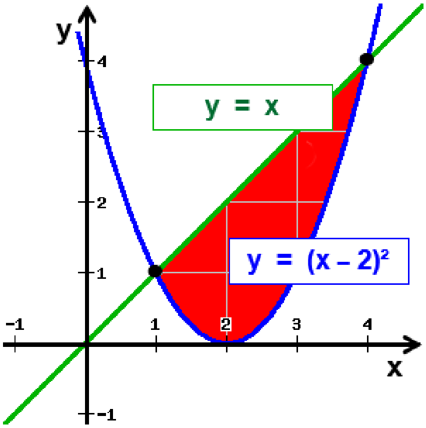
4 Das Berechnen des Flächeninhalts zwischen zwei Funktionen

9.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen

$y = (x - 2)^2$

und $y = x$

eingeschlossen wird!



Schnittpunkte berechnen:

$$x = (x-2)^2$$

$$x = x^2 - 4x + 4$$

$$0 = x^2 - 5x + 4$$

$$x_{1/2} = +\,{}^{5}/_{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$$

$$= +\,{}^{5}/_{2} \pm {}^{3}/_{2}$$

$$x_1 = +\,{}^{8}/_{2} = +4$$

$$x_2 = +\,{}^{2}/_{2} = +1$$

Die y-Koordinaten der beiden Schnittpunkte sind für diese Aufgabe nicht bedeutsam.

Fläche berechnen:

$$A = \int_1^4 (x - (x-2)^2)dx$$

$$= \int_1^4 \left(x - (x^2 - 4x + 4)\right)dx$$

$$= \int_1^4 (x - x^2 + 4x - 4)dx$$

$$= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\ dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4$$

$$= \left(-\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 + \tfrac{5}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4\right) - \left(-\tfrac{1}{3} \cdot 1^3 + \tfrac{5}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1\right)$$

$$= \left(-\tfrac{64}{3} + \tfrac{80}{2} - 16\right) - \left(-\tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{2} - 4\right)$$

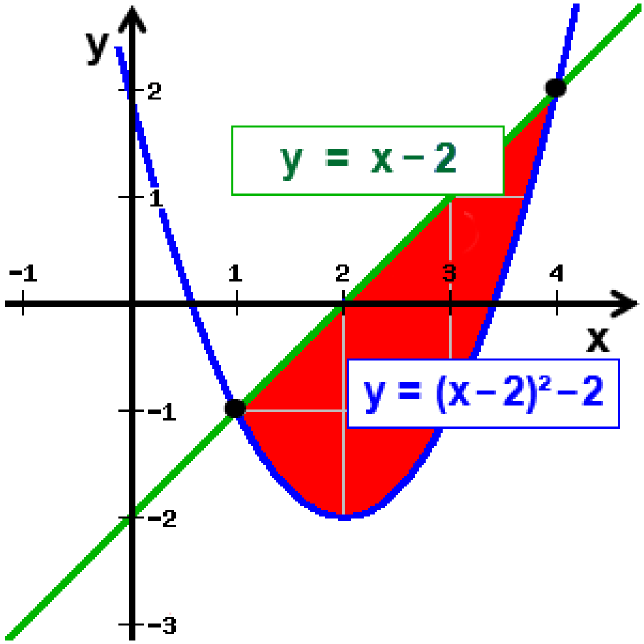
$$= -\tfrac{64}{3} + \tfrac{80}{2} - 16 \quad + \quad \tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{2} + 4$$

$$= -\tfrac{63}{3} + \tfrac{75}{2} - 12$$

$$= -21 + 37{,}5 - 12$$

$$= \mathbf{4{,}5\ FE}$$

10.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = (x - 2)^2 - 2$** und **$y = x - 2$** eingeschlossen wird!



<u>Schnittpunkte berechnen:</u>

$x - 2 = (x - 2)^2 - 2 \quad | +2$

$x = x^2 - 4x + 4 \quad | -x$

$0 = x^2 - 5x + 4$

$$x_{1/2} = +\,{}^5\!/_2 \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$$

$$= +\,{}^5\!/_2 \pm {}^3\!/_2$$

$x_1 = +\,{}^8\!/_2 = +\,4$

$x_2 = +\,{}^2\!/_2 = +\,1$

Die y-Koordinaten der beiden Schnittpunkte sind für diese Aufgabe nicht bedeutsam.

Fläche berechnen:

$$A = \int_1^4 (x - 2 - ((x-2)^2 - 2))dx$$

$$= \int_1^4 (x - 2 - ((x^2 - 4x + 4) - 2))dx$$

$$= \int_1^4 (x - 2 - x^2 + 4x - 4 + 2)dx$$

$$= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)\ dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4$$

$$= (-\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 + \tfrac{5}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4) - (-\tfrac{1}{3} \cdot 1^3 + \tfrac{5}{2} \cdot 1^2 - 4 \cdot 1)$$

$$= (-\tfrac{64}{3} + \tfrac{80}{2} - 16) - (-\tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{2} - 4)$$

$$= -\tfrac{64}{3} + \tfrac{80}{2} - 16 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{5}{2} + 4$$

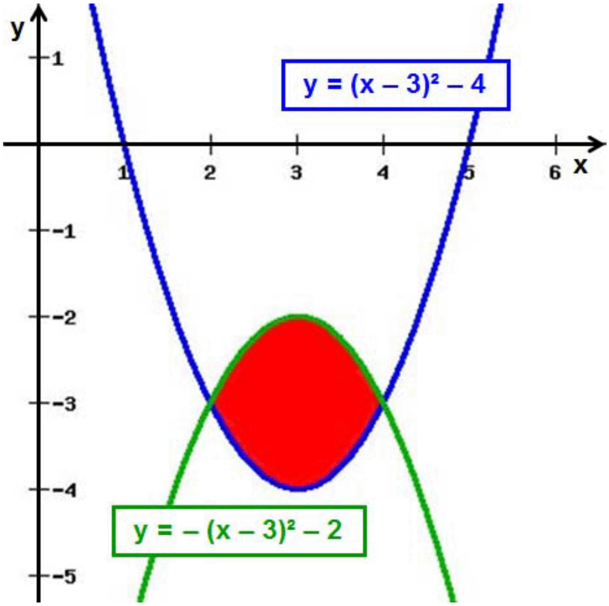
$$= -\tfrac{63}{3} + \tfrac{75}{2} - 12$$

$$= -21 + 37{,}5 - 12$$

$$= \mathbf{4{,}5\ FE}$$

Erkenntnis: **Wird die gesuchte Fläche von zwei Funktionen umschlossen (und nicht durch die x-Achse begrenzt), ist es egal, wo sich die Fläche befindet.**

11.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen $y = (x-3)^2 - 4$ und $y = -(x-3)^2 - 2$ eingeschlossen wird!



Schnittpunkte berechnen:

$$(x-3)^2 - 4 = -(x-3)^2 - 2$$

$$x^2 - 6x + 9 - 4 = -(x^2 - 6x + 9) - 2$$

$$x^2 - 6x + 5 = -x^2 + 6x - 11$$

$$2x^2 - 12x + 16 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x_{1/2} = +3 \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 8}$$

$$= +3 \pm \sqrt{1}$$

$$= +3 \pm 1$$

$$x_1 = +4$$

$$x_2 = +2$$

Fläche berechnen:

$$A = \int_2^4 ((-(x-3)^2 - 2) - ((x-3)^2 - 4))\,dx$$

$$= \int_2^4 ((-(x^2 - 6x + 9) - 2) - ((x^2 - 6x + 9) - 4))\,dx$$

$$= \int_2^4 ((-x^2 + 6x - 9 - 2) - (x^2 - 6x + 9 - 4))\,dx$$

$$= \int_2^4 (-x^2 + 6x - 11 - x^2 + 6x - 5)\,dx$$

$$= \int_2^4 (-2x^2 + 12x - 16)\,dx$$

$$A = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 16x\right]_2^4$$

$$= (-\tfrac{2}{3}\cdot 64 + 6\cdot 16 - 16\cdot 4) - (-\tfrac{2}{3}\cdot 8 + 6\cdot 4 - 16\cdot 2)$$

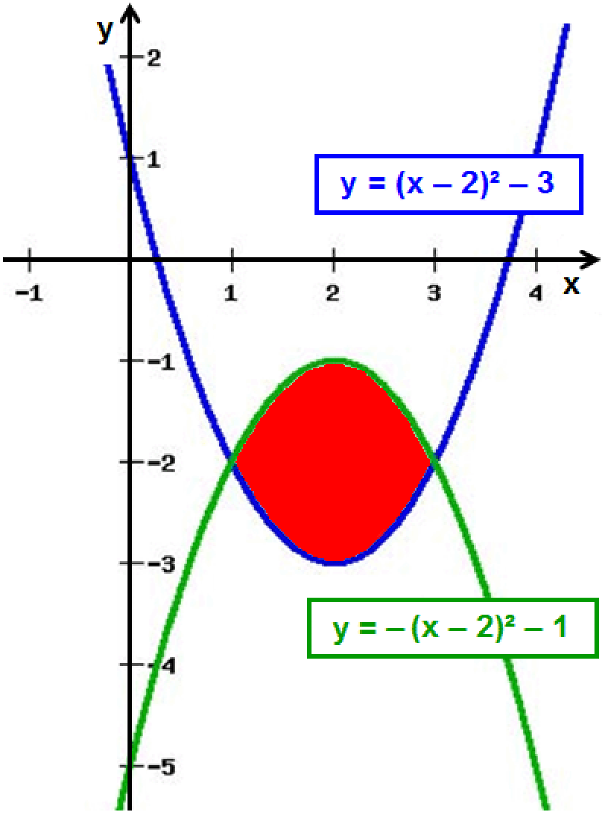
$$= -\tfrac{128}{3} + 96 - 64 + \tfrac{16}{3} - 24 + 32$$

$$= -\tfrac{112}{3} + 40$$

$$= -37\tfrac{1}{3} + 40$$

$$= 2\tfrac{2}{3}\ \text{FE}$$

12.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen **$y = (x - 2)^2 - 3$** und **$y = -(x - 2)^2 - 1$** eingeschlossen wird!



Schnittpunkte berechnen:

$$(x-2)^2 - 3 = -(x-2)^2 - 1$$

$$x^2 - 4x + 4 - 3 = -(x^2 - 4x + 4) - 1$$

$$x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 4x - 5$$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = +2 \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3}$$

$$= +2 \pm \sqrt{1}$$

$$= +2 \pm 1$$

$$x_1 = +1$$

$$x_2 = +3$$

<u>Fläche berechnen:</u>

$$A = \int_1^3 \left((-(x-2)^2 - 1) - ((x-2)^2 - 3)\right)dx$$

$$= \int_1^3 \left((-(x^2 - 4x + 4) - 1) - \left((x^2 - 4x + 4) - 3\right)\right) dx$$

$$= \int_1^3 \left((-x^2 + 4x - 4 - 1) - (x^2 - 4x + 4 - 3)\right)dx$$

$$= \int_1^3 (-x^2 + 4x - 5 - \quad x^2 + 4x - 1)\, dx$$

$$= \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)\, dx$$

$$A = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x\right]_1^3$$

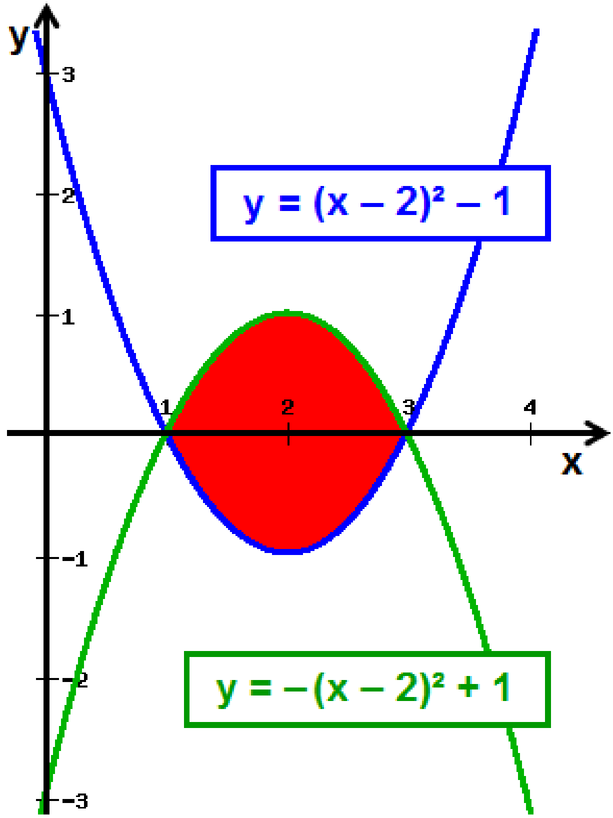
$$= (-\tfrac{2}{3} \cdot 27 + 4 \cdot 9 - 6 \cdot 3) - (-\tfrac{2}{3} \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1)$$

$$= -18 + 36 - 18 + \tfrac{2}{3} - 4 + 6$$

$$= 0 + \tfrac{2}{3} + 2$$

$$= \mathbf{2\tfrac{2}{3}\ FE}$$

13.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen $y = (x - 2)^2 - 1$ und $y = -(x - 2)^2 + 1$ eingeschlossen wird!



Schnittpunkte berechnen:

$$(x - 2)^2 - 1 = -(x - 2)^2 + 1$$

$$x^2 - 4x + 4 - 1 = -(x^2 - 4x + 4) + 1$$

$$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 4x - 3$$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0 \quad | :2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x_{1/2} = +2 \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3}$$

$$= +2 \pm \sqrt{1}$$

$$= +2 \pm 1$$

$$x_1 = +1$$

$$x_2 = +3$$

<u>Fläche berechnen:</u>

$$A = \int_1^3 \left((-(x-2)^2 + 1) - ((x-2)^2 - 1)\right) dx$$

$$= \int_1^3 \left((-(x^2 - 4x + 4) + 1) - \left((x^2 - 4x + 4) - 1\right)\right) dx$$

$$= \int_1^3 \left((-x^2 + 4x - 4 + 1) - (x^2 - 4x + 4 - 1)\right) dx$$

$$= \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3 \; - \; x^2 + 4x - 3)\, dx$$

$$= \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)\, dx$$

$$A = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 6x \right]_1^3$$

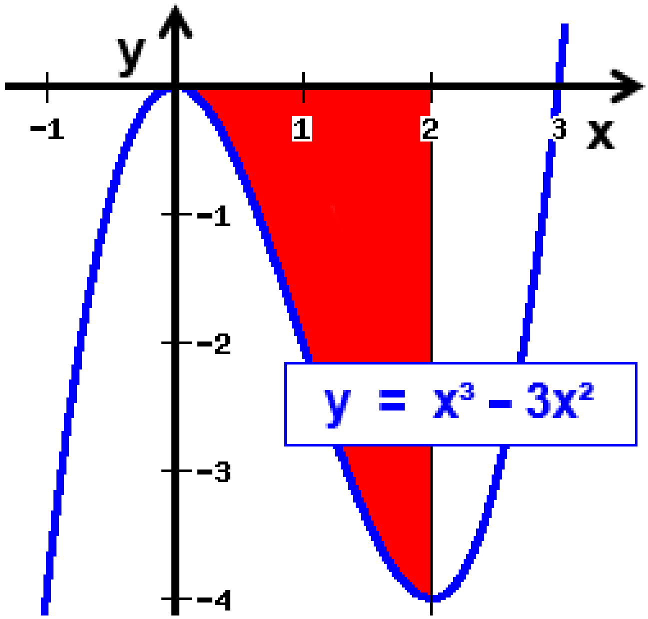
$$= (-\tfrac{2}{3} \cdot 27 + 4 \cdot 9 - 6 \cdot 3) - (-\tfrac{2}{3} \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1)$$

$$= -18 + 36 - 18 + \tfrac{2}{3} - 4 + 6$$

$$= 0 + \tfrac{2}{3} + 2$$

$$= \mathbf{2\tfrac{2}{3}\ FE}$$

14.) Berechnen Sie für das Intervall $0 \leq x \leq 2$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = x^3 - 3x^2$ und der x-Achse!



$$A = \int_0^2 (x^3 - 3x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3\right]_0^2$$

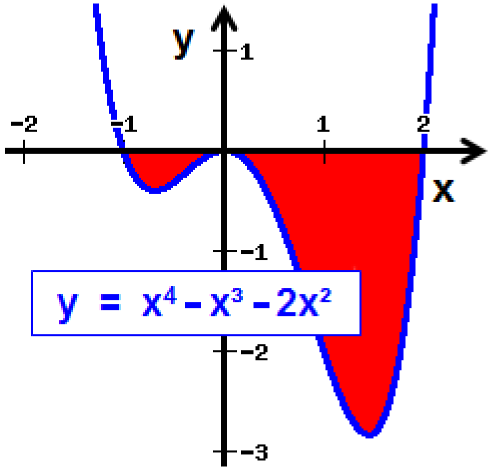
$$= (\tfrac{1}{4} \cdot 2^4 - 2^3) - (\tfrac{1}{4} \cdot 0^4 - 0^3)$$

$$= 4 - 8 - 0$$

$$= -4$$

$$= \mathbf{4\ FE}$$

15.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \le x \le 2$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = x^4 - x^3 - 2x^2$ und der x-Achse!



$$A = \int_{-1}^{2} (x^4 - x^3 - 2x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^{2}$$

$$= \left(\tfrac{1}{5} \cdot 2^5 - \tfrac{1}{4} \cdot 2^4 - \tfrac{2}{3} \cdot 2^3\right) - \left(\tfrac{1}{5} \cdot (-1)^5 - \tfrac{1}{4} \cdot (-1)^4 - \tfrac{2}{3} \cdot (-1)^3\right)$$

$$= \left(\tfrac{1}{5} \cdot 32 - \tfrac{1}{4} \cdot 16 - \tfrac{2}{3} \cdot 8\right) - \left(\tfrac{1}{5} \cdot (-1) - \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} \cdot (-1)\right)$$

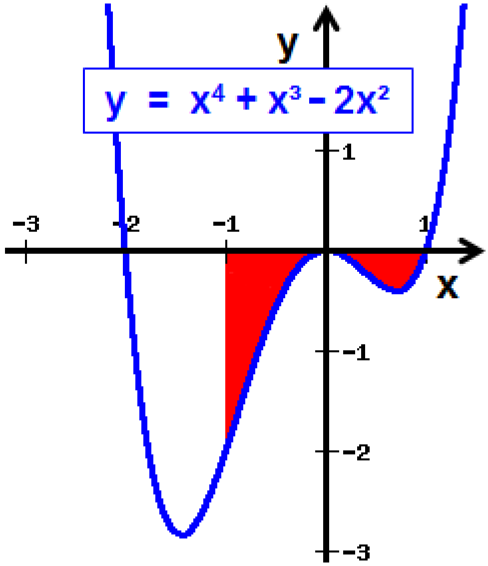
$$= \tfrac{32}{5} - 4 - \tfrac{16}{3} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3}$$

$$= 6{,}6 - 4 - \tfrac{18}{3} + 0{,}25$$

$$= -3{,}15$$

$$= \mathbf{3{,}15\ FE}$$

16.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \le x \le 1$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^4 + x^3 - 2x^2$ und der x-Achse!



$$A = \int_{-1}^{1} (x^4 + x^3 - 2x^2)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3}\right) - \left(-\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3}\right)$$

$$= \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3}$$

$$= \tfrac{2}{5} - \tfrac{4}{3}$$

$$= -\tfrac{14}{15}$$

$$= \tfrac{14}{15}\ \text{FE}$$

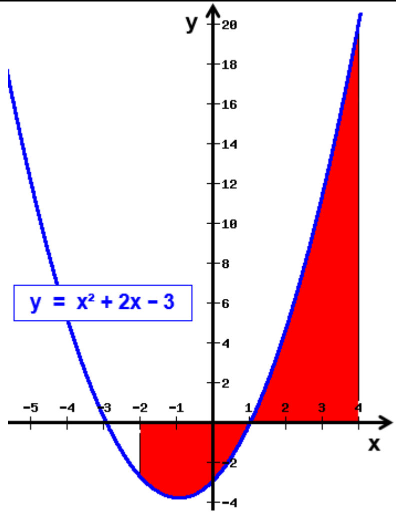
17.) Berechnen Sie für das Intervall

$$-2 \leq x \leq 4$$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion

$$\color{blue}{\mathbf{y = x^2 + 2x - 3}}$$

und der x-Achse!



$$A = \int_{-2}^{4} (x^2 + 2x - 3)\,dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{-2}^{1} + \left[\tfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x\right]_{1}^{4}$$

$$= \left|\left(\tfrac{1}{3} + 1 - 3\right) - \left(\tfrac{1}{3} \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 3 \cdot (-2)\right)\right| + \left|\left(\tfrac{1}{3} \cdot 4^3 + 4^2 - 3 \cdot 4\right) - \left(\tfrac{1}{3} + 1 - 3\right)\right|$$

$$= \left|-\tfrac{5}{3} - \left(-\tfrac{8}{3} + 4 + 6\right)\right| + \left|\left(\tfrac{64}{3} + 16 - 12\right) - \left(\tfrac{1}{3} + 1 - 3\right)\right|$$

$$= \left|-\tfrac{5}{3} - \tfrac{22}{3}\right| + \left|\left(\tfrac{64}{3} + 4\right) - \left(\tfrac{1}{3} + 1 - 3\right)\right|$$

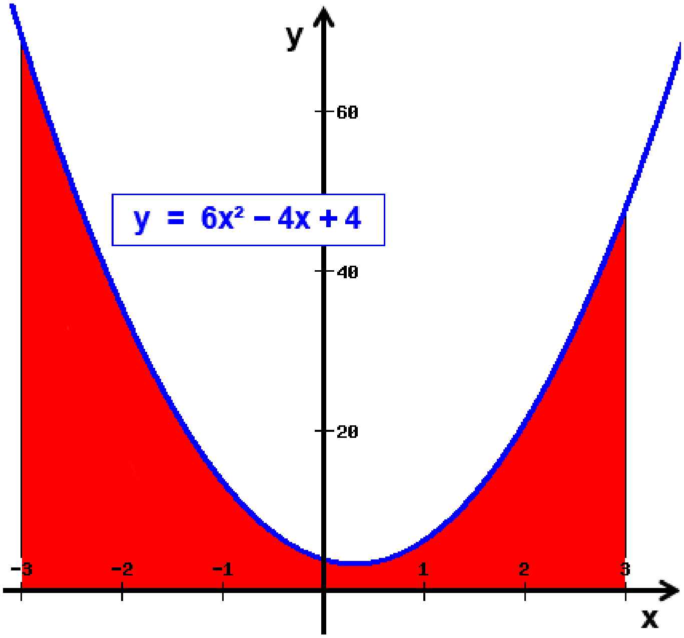
$$= \left|-\tfrac{27}{3}\right| + \left|\tfrac{64}{3} + 4 + \tfrac{5}{3}\right|$$

$$= 9 + \tfrac{69}{3} + 4$$

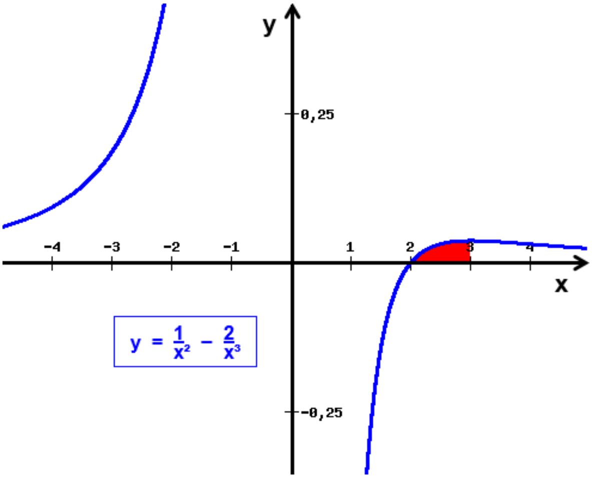
$$= \color{red}{\mathbf{36\ FE}}$$

18.) Berechnen Sie für das Intervall $-3 \le x \le 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion

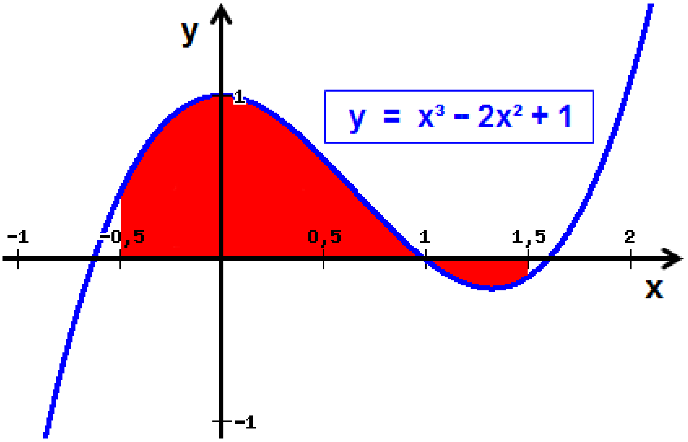
$y = 6x^2 - 4x + 4$ und der x-Achse!



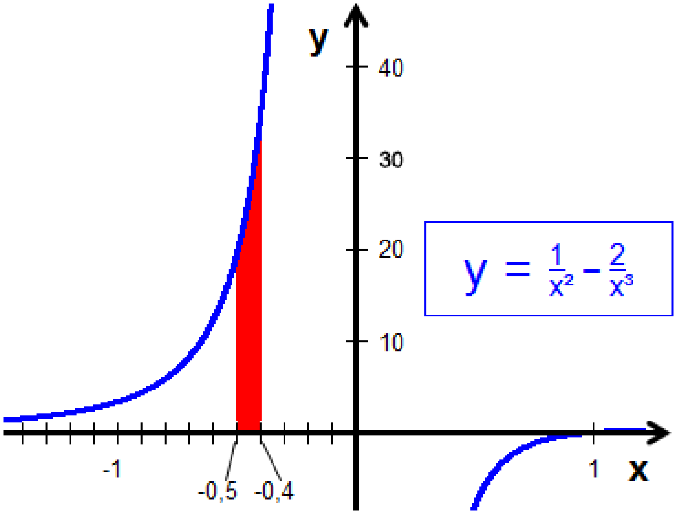
19.) Berechnen Sie für das Intervall $2 \leq x \leq 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = {}^{1}/_{x^2} - {}^{2}/_{x^3}$ und der x-Achse!



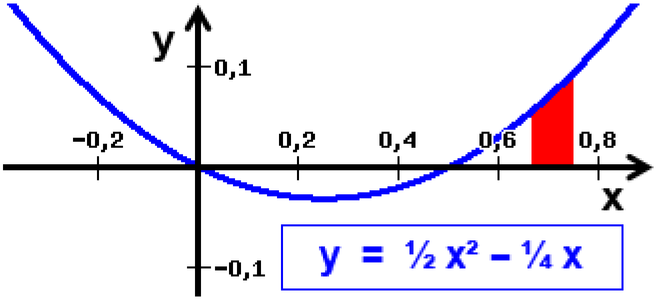
20.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^3 - 2x^2 + 1$ und der x-Achse!



21.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \le x \le -0{,}4$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = {}^{1}/_{x^2} - {}^{2}/_{x^3}$** und der x-Achse!



22.) Berechnen Sie für das Intervall $^2/_3 \leq x \leq {^3/_4}$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x$ und der x-Achse!



23.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $$\int_3^x (2t - 4)\, dt = 8$$

24.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $\int_{2}^{x} 3t^2 \, dt = 56$

25.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für das Integral $\int_{-3}^{x} (2t + 2)\, dt \quad = \; 5$

Hinweis: Eine 0 Einheiten große Fläche erhält man bei identischer unterer und oberer Integrationsgrenze oder wenn Teilflächen oberhalb und unterhalb durch die x-Achse begrenzt werden.

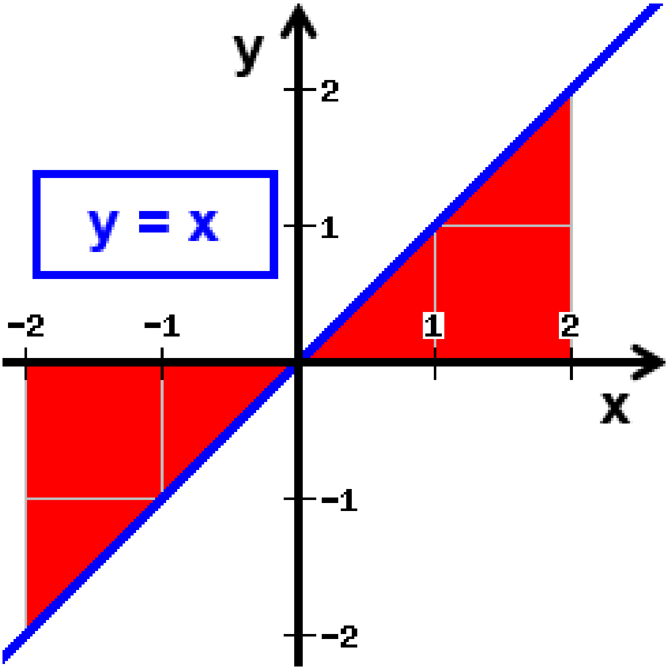
26.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $\int_0^x (2t^2 - t)\,dt = 0$

27.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für das Integral $\int_1^x (3t^2 - 2t - 3)\,dt = 0$

28.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_{-2}^{2} ax\,dx$$



29.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

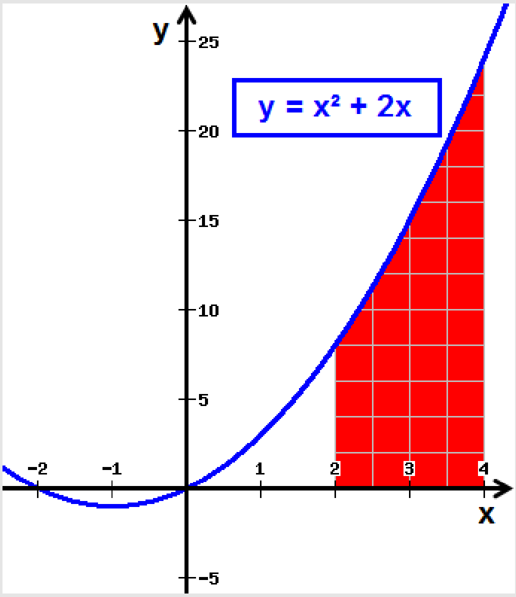
$$\int_{2}^{2a} ax^2 \, dx$$

30.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_3^4 \left(-x^2 + 4x\right) dx$$

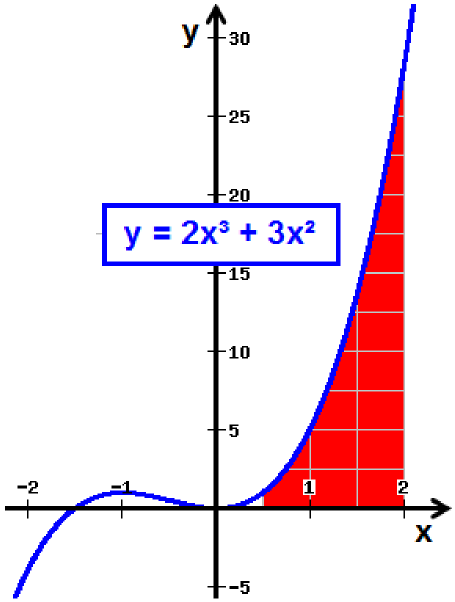
31.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_2^4 (x^2 + 2x)\, dx$$



32.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

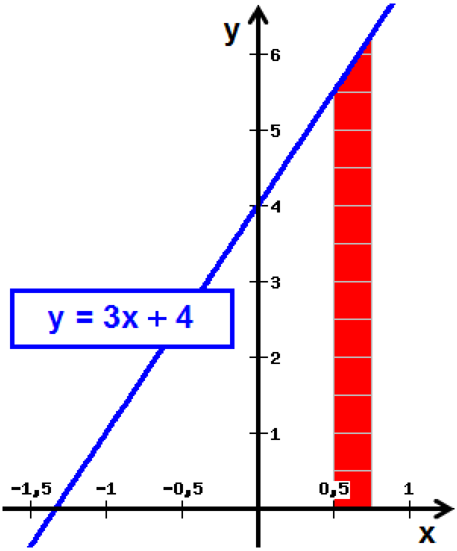
$$\int_{0,5}^{2} (2x^3 + 3x^2)\,dx$$



$8 + 8 - (^1/_{32} + {}^1/_8)$

33.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_{0,5}^{0,75} (3x + 4)\,dx$$



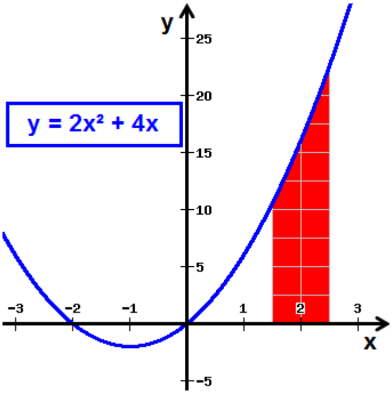
=

=

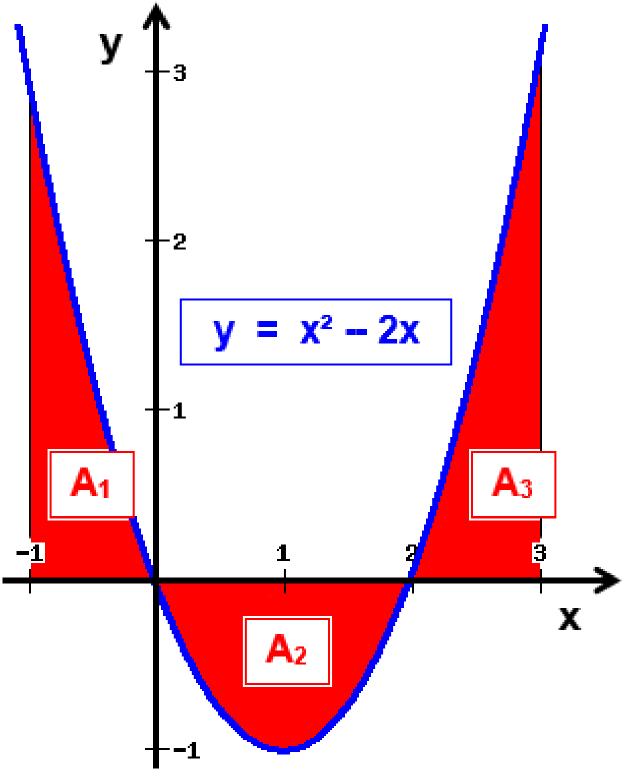
=

34.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

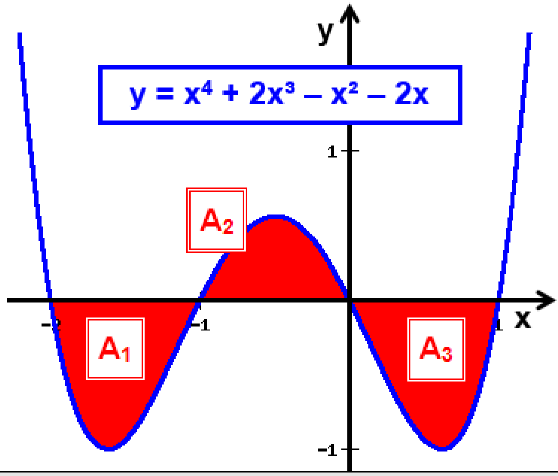
$$\int_{1,5}^{2,5} (2x^2 + 4x)\, dx$$



35.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \le x \le 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^2 - 2x$ und der x-Achse!



36.) Berechnen Sie für das Intervall $-2 \leq x \leq +1$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = (x+2) \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-1)$
und der x-Achse!



37.) Berechnen Sie für das Intervall $-2{,}5 \leq x \leq +0{,}5$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = -x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x = (-x^2 - 5x - 6) \cdot (x^2 - x)$
und der x-Achse!

38.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = x^2 - 2x$** und **$y = x$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

39.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = -x^2 + 3$** und **$y = -2x$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

40.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = x + 1$** und **$y = \frac{1}{2} x^2 - x - 1{,}5$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

41.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 1{,}5$ die durch die Funktion $\mathbf{y = x^2 - 2x - 3}$ und die x-Achse eingeschlossene Fläche!

Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der Funktion!

42.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von den beiden Funktionen **$y = 2x^3$** und **$y = 3x^2 - 1$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie die Schnittpunkte beider Funktionen!

43.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von den Funktionen $y = x^4 + x^2$ und $y = -x^2 + 3$ eingeschlossen wird!

44.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von den Funktionen **$y = x^3 + x^2 - 4x - 4$** und **$y = -x^3 - x^2 + 4x + 4$** eingeschlossen wird?

45.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von der Funktion **$y = x^3 - 1{,}5x^2 - 5\frac{1}{2}x + 3$** und der x-Achse zwischen der ersten Nullstelle und $x = +2$ eingeschlossen wird? Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei $x = +\frac{1}{2}$.

46.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ die durch die Funktion $\mathbf{y = 8x^4 + x^2 - 9}$ und die x-Achse eingeschlossene Fläche!

47.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von der Funktion **$y = 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 6x$** und der x-Achse zwischen der ersten und der vierten Nullstelle eingeschlossen wird! Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei $x = -1$.

48.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von der Funktion **$y = 0{,}75x^4 - 1{,}5x^3 - 0{,}75x^2 + 1{,}5x$** und der x-Achse zwischen der ersten und der vierten Nullstelle eingeschlossen wird! Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei x = +**2**.

49.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von den beiden Funktionen **$y = 0{,}25x^3 - 2{,}5x^2 + 6{,}25x$** und **$y = 4{,}5 - 0{,}5x$** eingeschlossen wird?