Das Integralrechnen

1 Das Integralrechnen mit Integrationsgrenzen

Mithilfe der Integralrechnung können Flächeninhalte berechnet werden, z. B. zwischen mehreren Funktionen oder unterhalb einer Funktion.

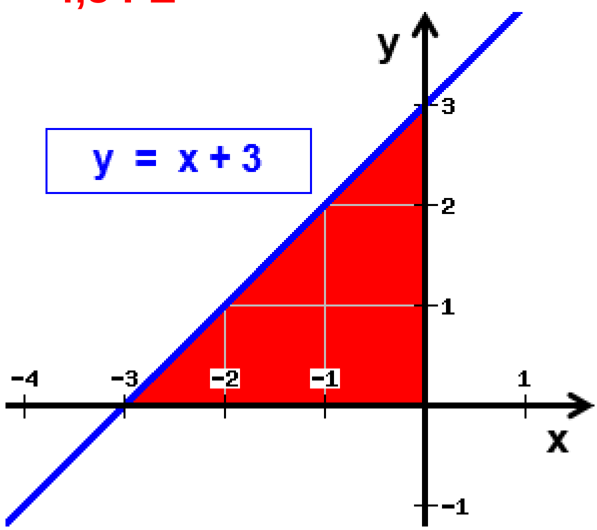
① $A = \int_{-3}^{0} (x + 3)\,dx$

② $= \left[\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-3}^{0}$

③ $= (\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0) - (\frac{1}{2} \cdot (-3)^2 + 3 \cdot (-3))$

$= \quad 0 \quad - (\frac{1}{2} \cdot 9 \quad - \quad 9 \quad)$

$=$ **4,5 FE**



Arbeitsschritte beim Integrieren:

① Die Funktion **$y = x + 3$** integrieren.
(Ergebnis: $\frac{1}{2}x^2 + 3x$)

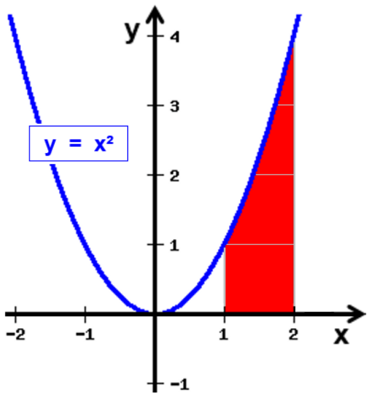
② Diese Stammfunktion (hier: $\frac{1}{2}x^2 + 3x$) wird in eckige Klammern gesetzt und mit den Integrationsgrenzen versehen.
Im Beispiel ist die obere Grenze = 0 und die untere Grenze = –3.

③ Funktion mit den beiden Integrationsgrenzen ausrechnen.

1.) Berechnen Sie für das Intervall

$$1 \leq x \leq 2$$

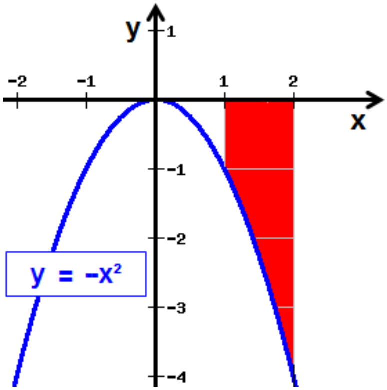
den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = x^2$** und der x-Achse!



2.) Berechnen Sie für das Intervall

$$1 \leq x \leq 2$$

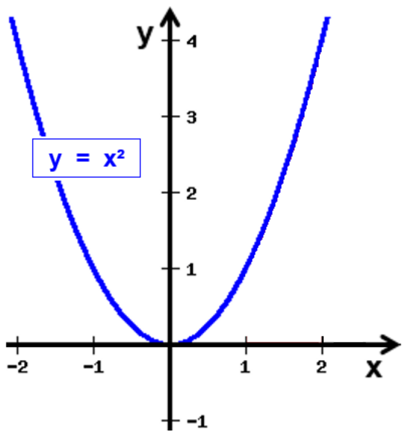
den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = -x^2$** und der x-Achse!



2 Der Unterschied zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral

Ein unbestimmtes Integral besitzt keine Integrationsgrenzen, die Lösung einer Aufgabe mit einem unbestimmten Integral ist eine Stammfunktion.

Beispiel:
Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen der Funktion **$y = x^2$** und der x-Achse!



$$A = \int x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 + C \right]$$

Ein bestimmtes Integral besitzt Integrationsgrenzen, die Lösung einer Aufgabe mit einem bestimmten Integral ist ein einfacher Zahlenwert.

$$A = \int_1^2 x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^3 + C \right]_1^2$$

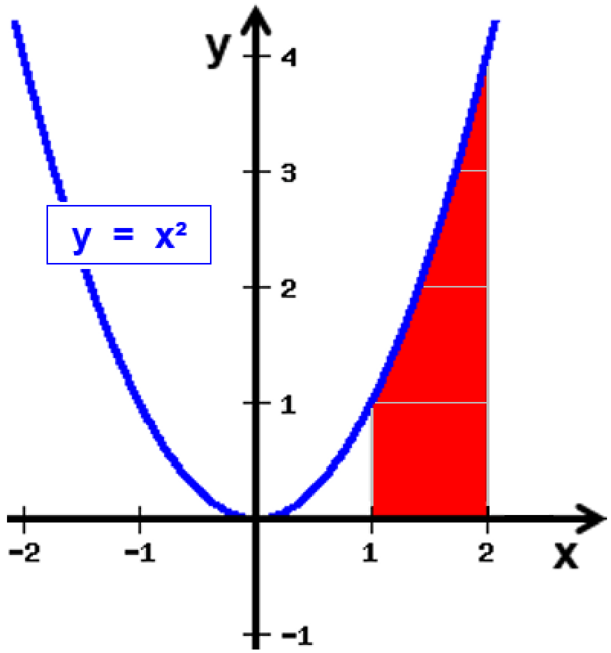
$$= {}^1/_3 \cdot 2^3 + C - ({}^1/_3 \cdot 1^3 + C)$$

$$= {}^8/_3 + C - {}^1/_3 - C$$

$$= {}^7/_3$$

$$= 2\,{}^1/_3 \text{ FE}$$

Beim bestimmten Integral hat die additive Konstante C keinen Einfluss auf den Zahlenwert.

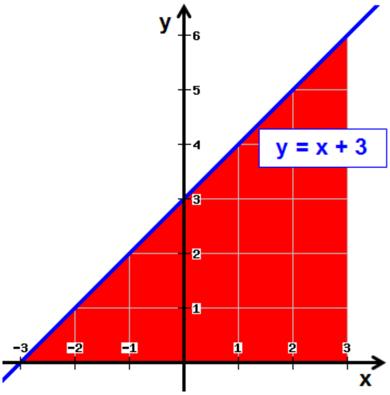


3 Der Wechsel über die x-Achse beim bestimmten Integral

3.) Berechnen Sie für das Intervall

$$-3 \leq x \leq 3$$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion **y = x + 3** und der x-Achse!



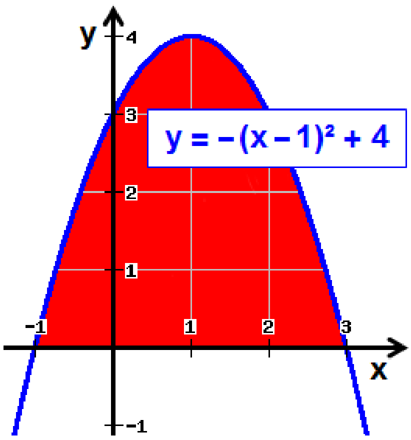
4.) Berechnen Sie für das Intervall

$-1 \leq x \leq 3$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion

$y = -(x-1)^2 + 4$

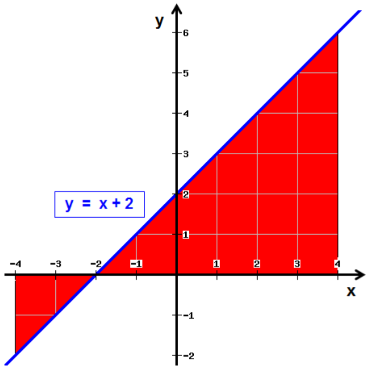
und der x-Achse!



5.) Berechnen Sie für das Intervall

$-4 \le x \le 4$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion **y = x + 2** und der x-Achse!



$$A = \int_{-4}^{4} (x + 2)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_{-4}^{4}$$

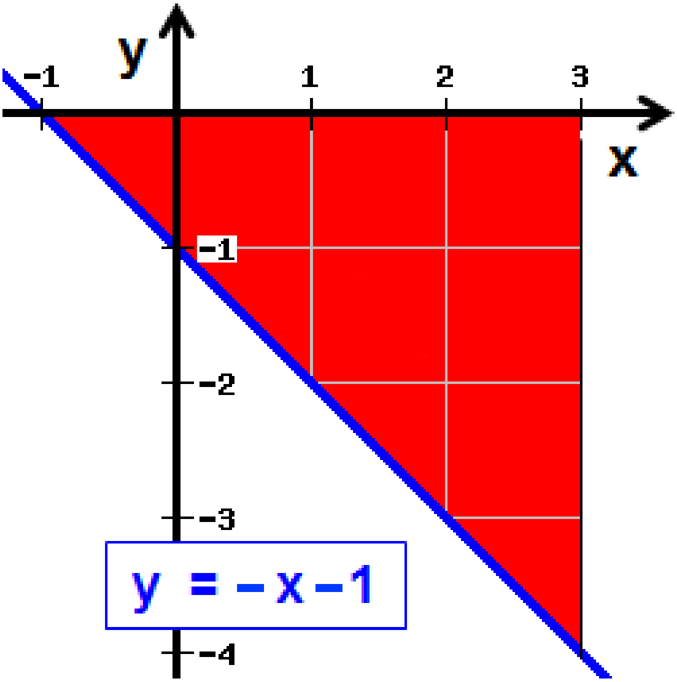
$$= \left(\tfrac{1}{2} \cdot 4^2 + 2 \cdot 4\right) - \left(\tfrac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4)\right)$$

$$= (\ 8 \ + \ 8\ ) - (\ 8 \ - \ 8\ )$$

$$= \quad 16 \quad - \quad 0$$

= **16 FE** **Falsch!**

6.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \leq x \leq 3$ den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und der Funktion **$y = -x - 1$** !

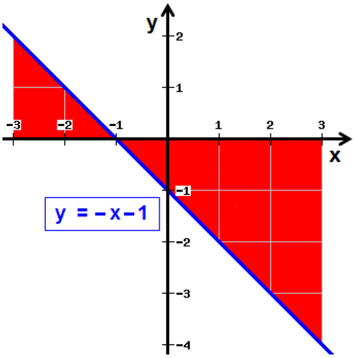


7.) Berechnen Sie für das Intervall

$-3 \leq x \leq 3$

den Flächeninhalt zwischen der Funktion

$y = -x - 1$ und der x-Achse!



$$A = \int_{-3}^{3} (-x - 1)\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 - x \right]_{-3}^{3}$$

$$= (-\tfrac{1}{2} \cdot 3^2 - 3) - (-\tfrac{1}{2} \cdot (-3)^2 - (-3))$$

$$= -7{,}5 + 1{,}5$$

$$= |-6|$$

= **6 FE** **Falsch!**

Achtung beim Wechsel über die x-Achse!

8.) Berechnen Sie folgende Integrale!

a) $\int_{-2}^{0} x \, dx$

$=$

$=$

$=$

b) $\int_{0}^{2} x^2 \, dx$

$=$

$=$

$=$

c) $\int_{-1}^{2} (2 - x) \, dx$

$=$

$=$

$=$

$=$

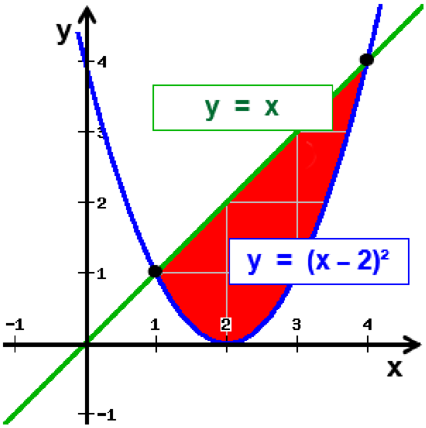
4 Das Berechnen des Flächeninhalts zwischen zwei Funktionen

9.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen

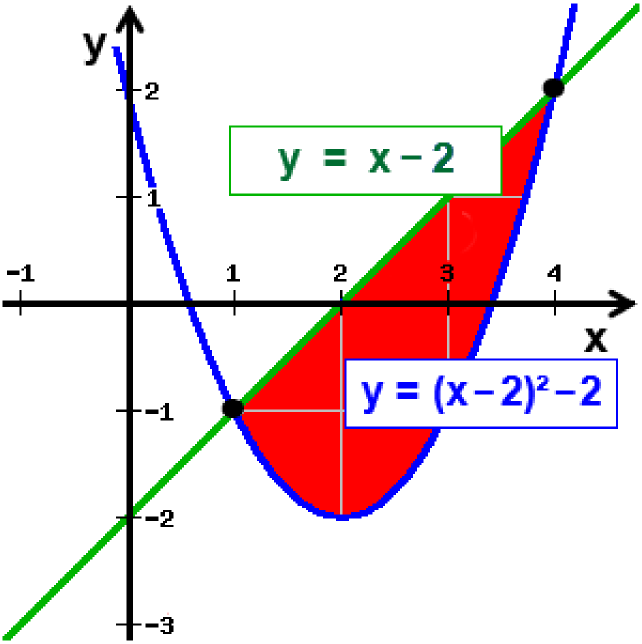
$y = (x - 2)^2$

und **$y = x$**

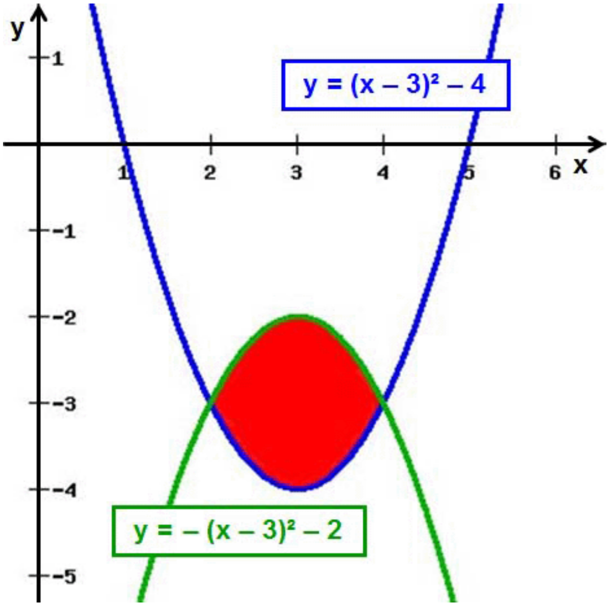
eingeschlossen wird!



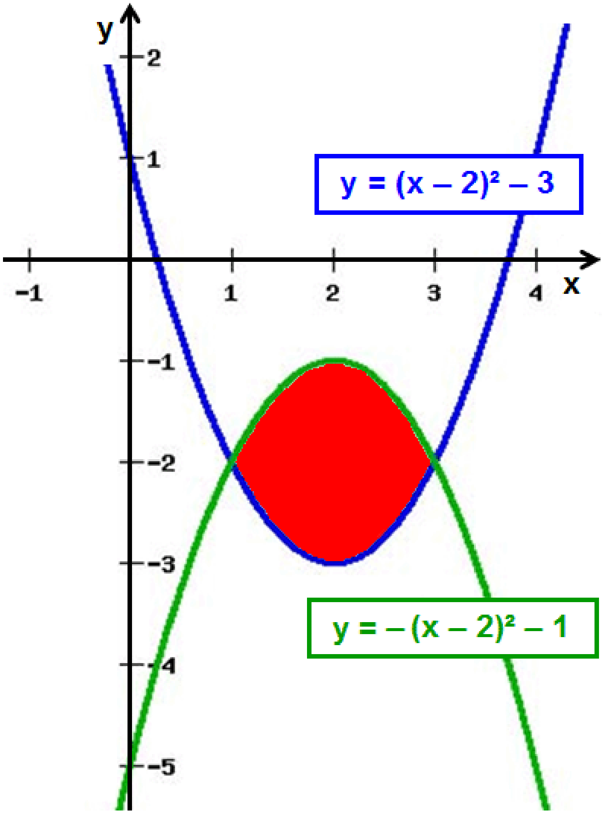
10.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = (x - 2)^2 - 2$** und **$y = x - 2$** eingeschlossen wird!



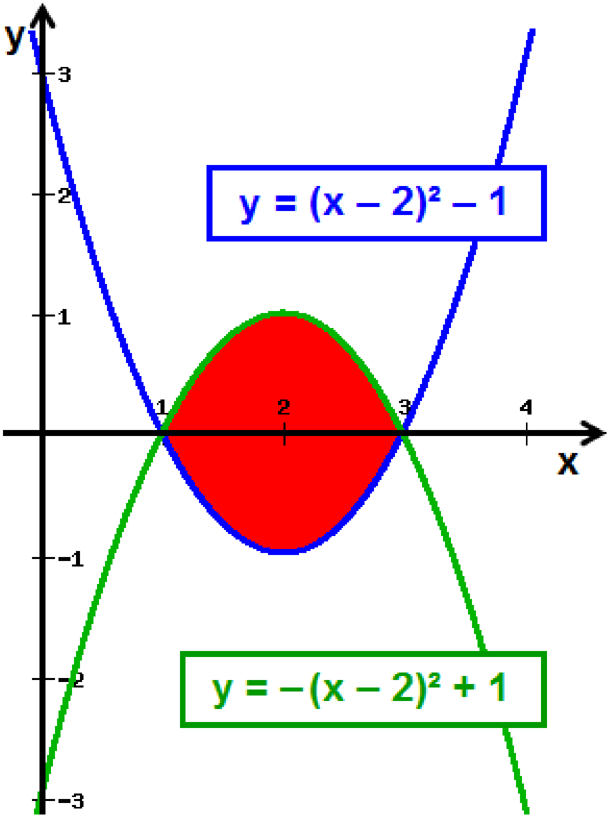
11.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen **$y = (x-3)^2 - 4$** und **$y = -(x-3)^2 - 2$** eingeschlossen wird!



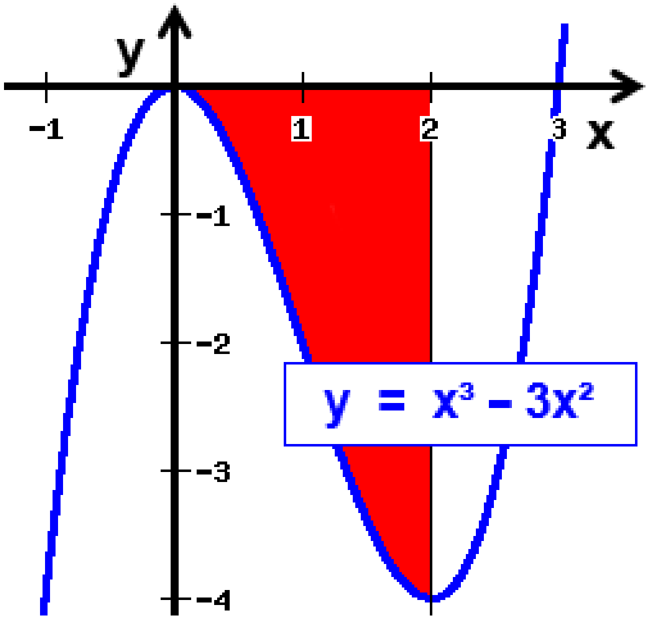
12.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen $y = (x - 2)^2 - 3$ und $y = -(x - 2)^2 - 1$ eingeschlossen wird!



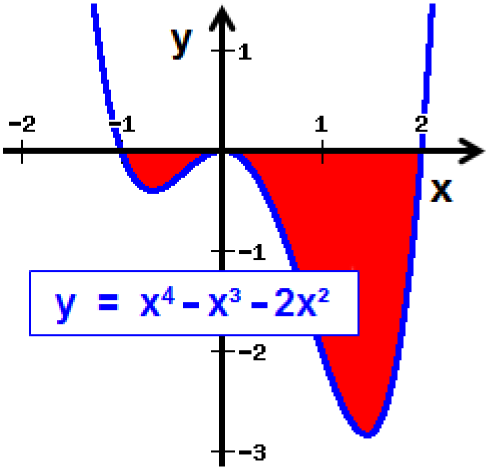
13.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die Funktionen $y = (x - 2)^2 - 1$ und $y = -(x - 2)^2 + 1$ eingeschlossen wird!



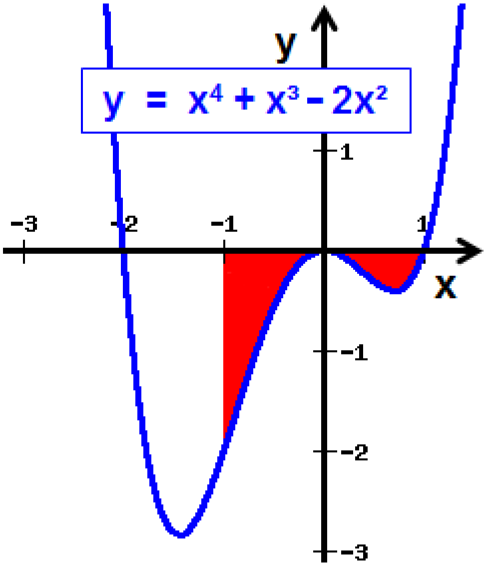
14.) Berechnen Sie für das Intervall $0 \le x \le 2$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = x^3 - 3x^2$ und der x-Achse!



15.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \le x \le 2$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^4 - x^3 - 2x^2$ und der x-Achse!



16.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \le x \le 1$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = x^4 + x^3 - 2x^2$ und der x-Achse!



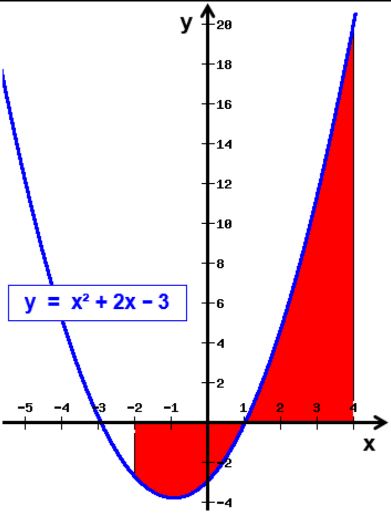
17.) Berechnen Sie für das Intervall

$-2 \leq x \leq 4$

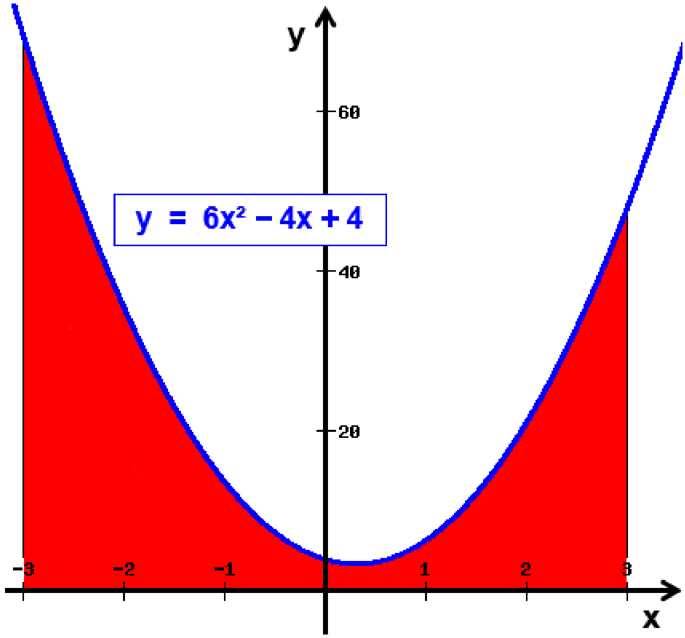
den Flächeninhalt zwischen der Funktion

$y = x^2 + 2x - 3$

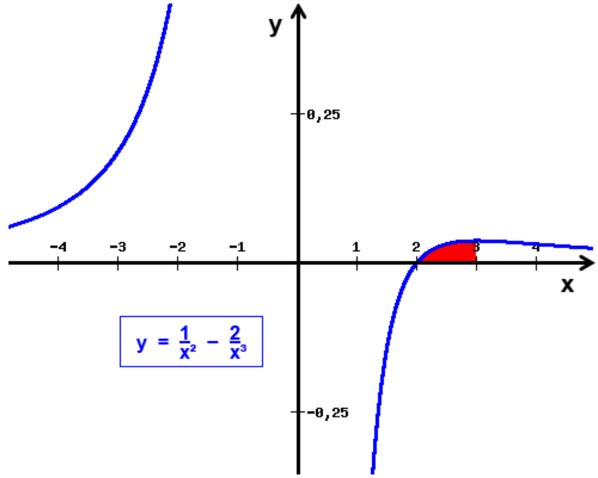
und der x-Achse!



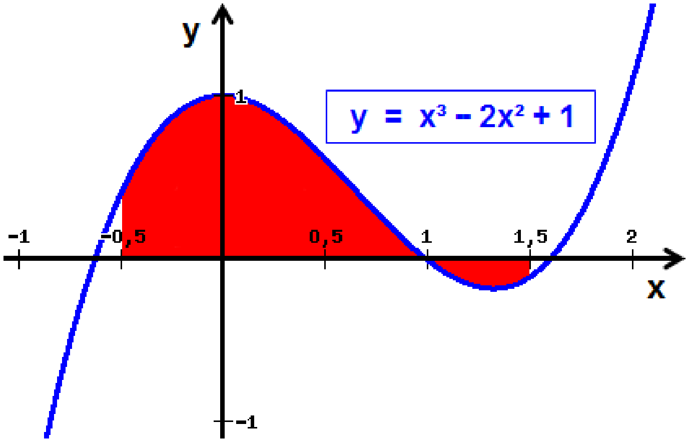
18.) Berechnen Sie für das Intervall $-3 \leq x \leq 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = 6x^2 - 4x + 4$ und der x-Achse!



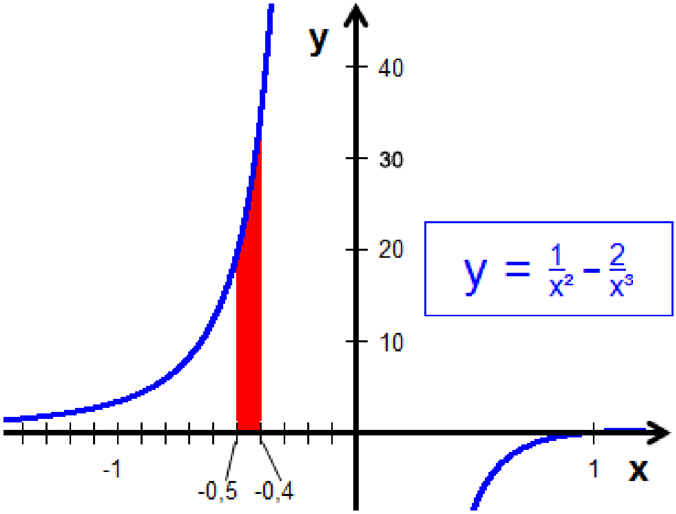
19.) Berechnen Sie für das Intervall $2 \le x \le 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = {}^{1}/_{x^2} - {}^{2}/_{x^3}$ und der x-Achse!



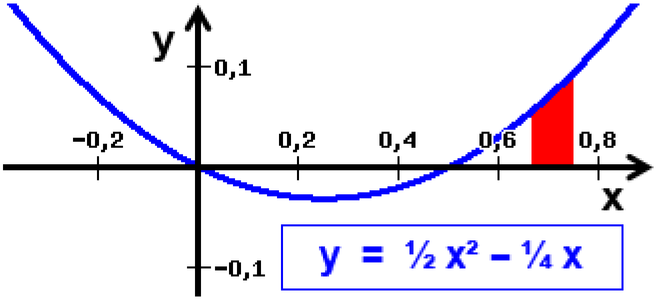
20.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = x^3 - 2x^2 + 1$ und der x-Achse!



21.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \le x \le -0{,}4$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = {}^{1}/_{x^2} - {}^{2}/_{x^3}$ und der x-Achse!



22.) Berechnen Sie für das Intervall $^2/_3 \le x \le {}^3/_4$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion $y = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x$ und der x-Achse!



23.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $\int_{3}^{x} (2t - 4)\, dt \;=\; 8$

24.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für das Integral $\int_{2}^{x} 3t^2 \, dt = 56$

25.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $\int_{-3}^{x} (2t + 2)\, dt = 5$

Hinweis: Eine 0 Einheiten große Fläche erhält man bei identischer unterer und oberer Integrationsgrenze oder wenn Teilflächen oberhalb und unterhalb durch die x-Achse begrenzt werden.

26.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

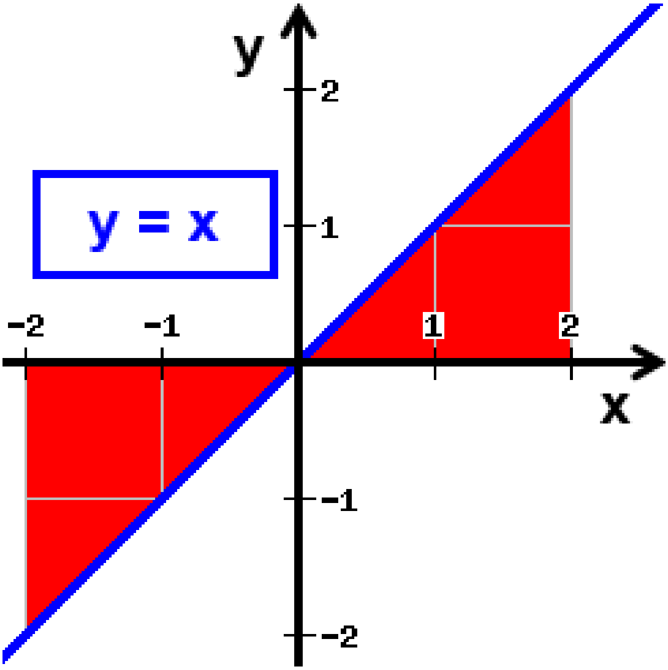
das Integral $\int_0^x (2t^2 - t)\, dt = 0$

27.) Berechnen Sie die obere Integrationsgrenze für

das Integral $\int_{1}^{x} (3t^2 - 2t - 3)\, dt = 0$

28.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_{-2}^{2} ax\,dx$$



29.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

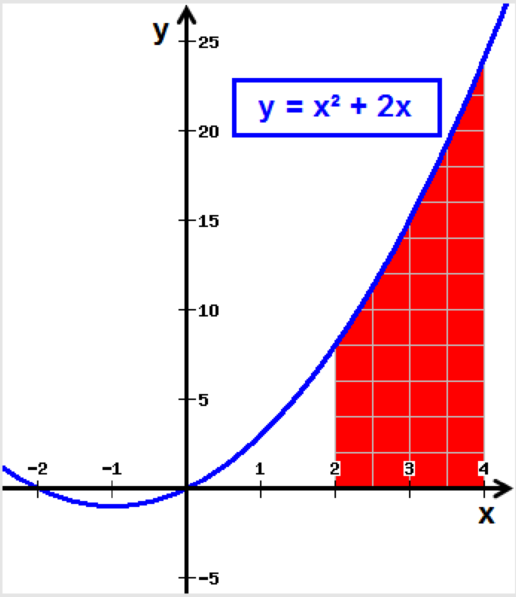
$$\int_{2}^{2a} ax^2 \, dx$$

30.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_3^4 (-x^2 + 4x)\, dx$$

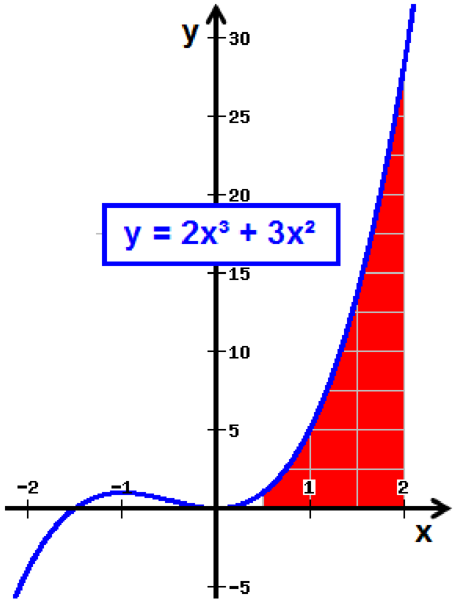
31.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_{2}^{4} (x^2 + 2x)\,dx$$



32.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

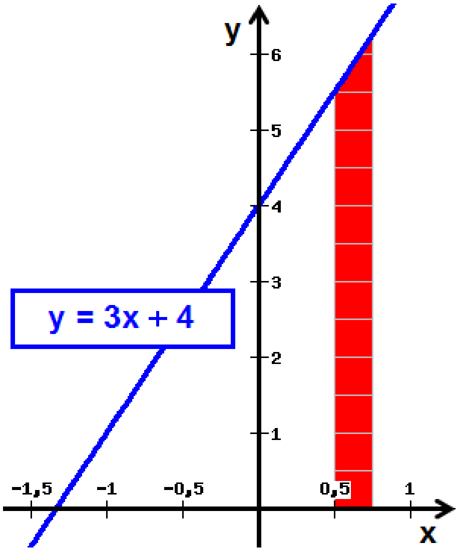
$$\int_{0,5}^{2} (2x^3 + 3x^2)\, dx$$



$8 + 8 \; - \; (^1/_{32} + {}^1/_8)$

33.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

$$\int_{0,5}^{0,75} (3x + 4)\, dx$$



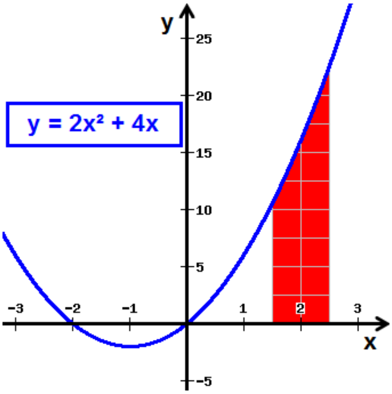
=

=

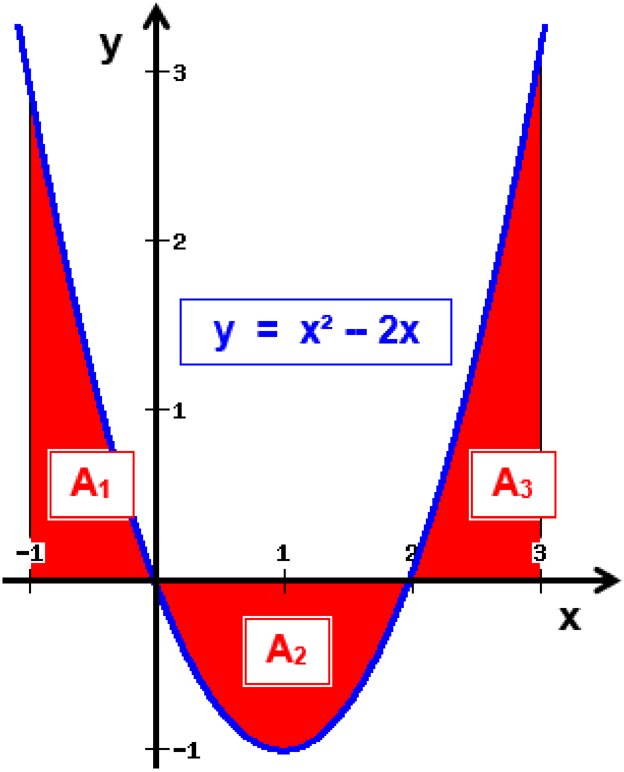
=

34.) Berechnen Sie den Flächeninhalt für

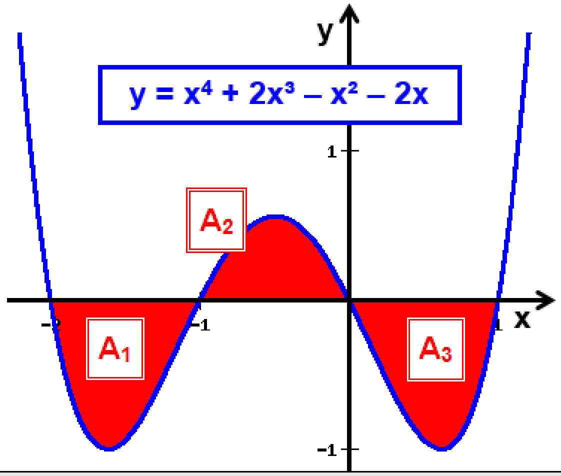
$$\int_{1,5}^{2,5} (2x^2 + 4x)\,dx$$



35.) Berechnen Sie für das Intervall $-1 \leq x \leq 3$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = x^2 - 2x$ und der x-Achse!



36.) Berechnen Sie für das Intervall $-2 \le x \le +1$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$y = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ = $(x+2) \cdot (x+1) \cdot x \cdot (x-1)$
und der x-Achse!



37.) Berechnen Sie für das Intervall $-2{,}5 \leq x \leq +0{,}5$ den Flächeninhalt zwischen der Funktion
$\mathbf{y = -x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x} = (-x^2 - 5x - 6) \cdot (x^2 - x)$
und der x-Achse!

38.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = x^2 - 2x$** und **$y = x$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

39.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = -x^2 + 3$** und **$y = -2x$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

40.) Berechnen Sie die Fläche, die durch die beiden Funktionen **$y = x + 1$** und **$y = \frac{1}{2} x^2 - x - 1{,}5$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der quadratischen Funktion!

41.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \le x \le 1{,}5$ die durch die Funktion $\mathbf{y = x^2 - 2x - 3}$ und die x-Achse eingeschlossene Fläche!

Berechnen Sie den Scheitelpunkt und die beiden Nullstellen der Funktion!

42.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von den beiden Funktionen **$y = 2x^3$** und **$y = 3x^2 - 1$** eingeschlossen wird! Berechnen Sie die Schnittpunkte beider Funktionen!

43.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von den Funktionen $\mathbf{y = x^4 + x^2}$ und $\mathbf{y = -x^2 + 3}$ eingeschlossen wird!

44.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von den Funktionen **$y = x^3 + x^2 - 4x - 4$** und **$y = -x^3 - x^2 + 4x + 4$** eingeschlossen wird?

45.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von der Funktion **$y = x^3 - 1{,}5x^2 - 5\frac{1}{2}x + 3$** und der x-Achse zwischen der ersten Nullstelle und $x = +2$ eingeschlossen wird? Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei $x = +\frac{1}{2}$.

46.) Berechnen Sie für das Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ die durch die Funktion $\mathbf{y = 8x^4 + x^2 - 9}$ und die x-Achse eingeschlossene Fläche!

47.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von der Funktion **$y = 3x^4 – 6x^3 – 3x^2 + 6x$** und der x-Achse zwischen der ersten und der vierten Nullstelle eingeschlossen wird! Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei $x = –1$.

48.) Berechnen Sie die Gesamtfläche, die von der Funktion $\mathbf{y = 0{,}75x^4 - 1{,}5x^3 - 0{,}75x^2 + 1{,}5x}$ und der x-Achse zwischen der ersten und der vierten Nullstelle eingeschlossen wird! Hinweis: Eine Nullstelle der Funktion liegt bei x = +**2**.

49.) Wie groß ist die Gesamtfläche, die von den beiden Funktionen **$y = 0{,}25x^3 - 2{,}5x^2 + 6{,}25x$** und **$y = 4{,}5 - 0{,}5x$** eingeschlossen wird?